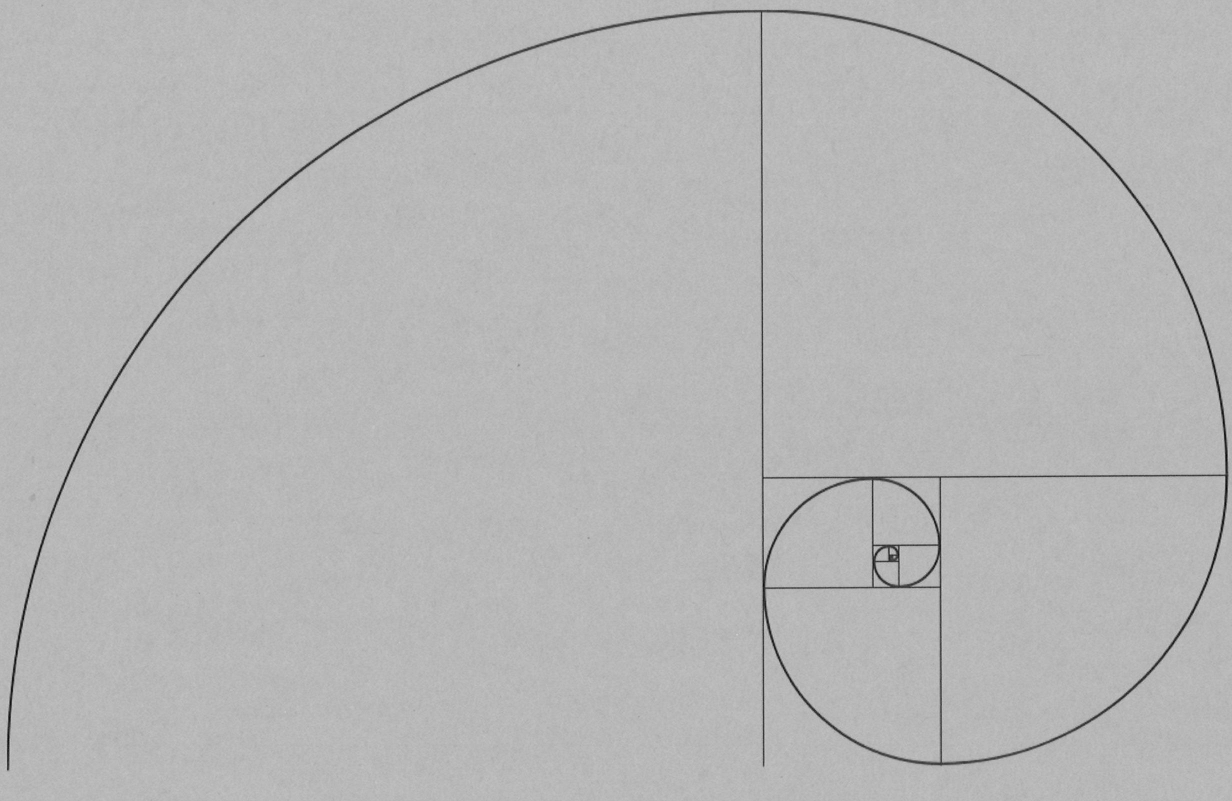
Bulletin

Juni 2007 – Juin 2007

N° 104

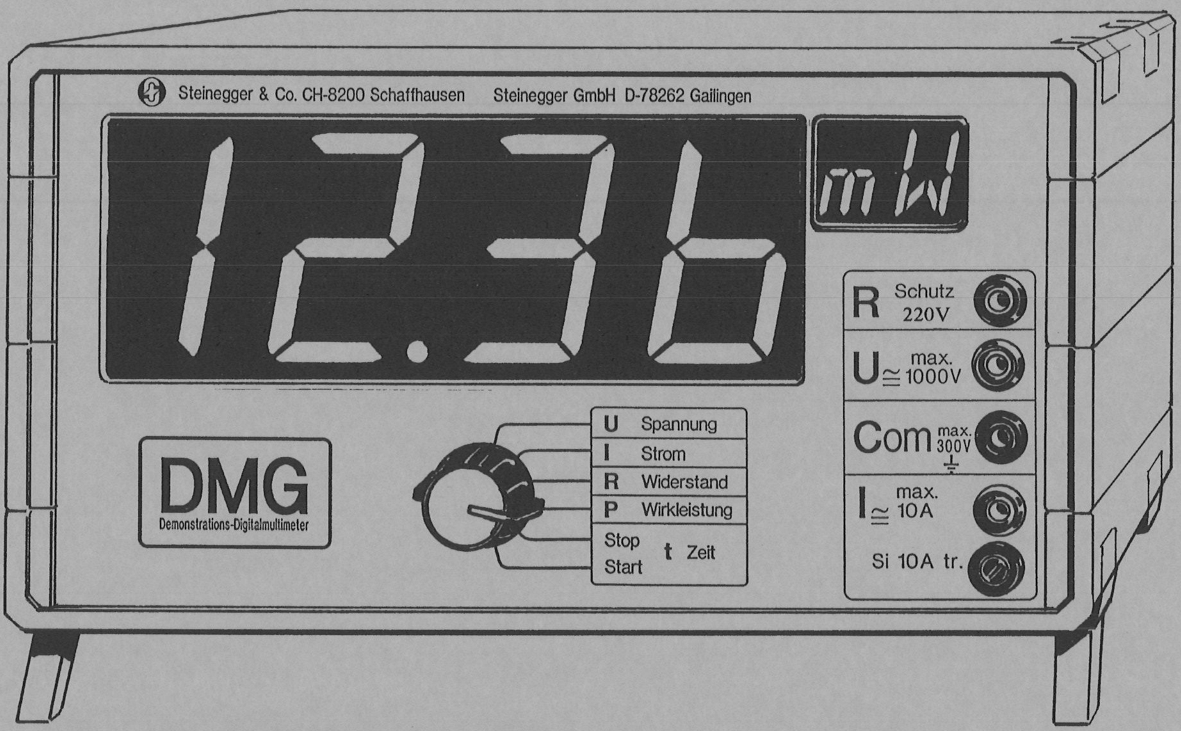


VSMP – SSPMP – SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalmultimeter DMG

Art. Nr. 150



Das vollautomatische Digitalmessgerät für Schulen; kompromisslose Qualität zu erstaunlich günstigem Preis!

- **Misst:** Gleich- und Wechselspannung (echt eff.) 0.1 mV - 1000 V≅
  Gleich- und Wechselströme (echt eff.) 1 μA - 10 A≅
  Widerstände 0.1 Ω - 20 MΩ
  Wirkleistung (!) 1 μW - 10 kW
  Zeit (Stoppuhr) 0.01 s - 2'000 s
- 56 mm hohe Ziffernanzeige - bis auf 25 m Distanz ablesbar
- 2'000 Messpunkte und integrierte 20 mm hohe Einheitenanzeige
- Vollautomatische Bereichswahl und raffinierte Einknopfbedienung
- Ausbau durch verschiedene Zusatzmodule
- Viele Zusatzgeräte direkt anschließbar
- Bestmöglicher Schutz in allen Bereichen
- **Attraktiver Preis: SFr 895.- (inkl. MWSt)**

Die kostenlose "Kurzbeschreibung DMG" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
CH-8200 Schaffhausen

☎ : 052-625 58 90
Fax : 052-625 58 60
Internet: www.steinegger.de

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

Kurse

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

http://www.vsmp.ch — http://www.sspmp.ch — http://www.ssimf.ch

Page de titre

Deux articles de ce Bulletin trouvent leur source dans les travaux de Fibonacci (Alain Stucki, p. 5 et Bernhard Ruh, p. 11). L'illustration de la page de titre représente une spirale de Fibonacci, créée par le dessin de courbes reliant les coins opposés d'un pavé de Fibonacci.
Source: Wikipedia, `http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number`

SSPMP - VSMP - SSIMF
SOCIÉTÉ SUISSE DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE
VEREIN SCHWEIZERISCHER MATHEMATIK- UND PHYSIKLEHRER
SOCIETA SVIZZERA DEGLI INSEGNANTI DI MATEMATICA E FISICA

Die 141. Delegierten- und Plenarversammlung des VSG 2007
Findet am Freitag, 16. November 2007, 10.00 – 15.15 Uhr
in der Aula der Kantonsschule Zofingen, Strengelbacherstrasse 25B, 4800 Zofingen statt.
http://www.kszofingen.ch/index3.htm

Das Hauptthema ist „**Gymnasiale Bildung und Bildungsforschung**"
Ab 15.45 findet die Generalversammlung des VSMP statt. Die Traktandenliste und das genauere Programm finden Sie im nächsten Bulletin und ab Oktober auf der Homepage.
www.vsmp.ch

La 141ème assemblée des délégués, et l'assemblée plénière 2007 de la SSPES auront lieu le vendredi, 16 novembre 2007, de 10.00-15.15
à l'aula du collège cantonal de Zofingen, Strengelbacherstrasse 25B, 4800 Zofingen
http://www.kszofingen.ch/index3.htm

Le thème principal en est **„la formation gymnasiale et la recherche pédagogique".**
À partir de 15.45 aura lieu l'assemblée générale de la SSPMP.
L'ordre du jour ainsi que le programme précis, seront communiqués dans le prochain bulletin, ainsi que sur notre site internet à partir d'octobre. www.sspmp.ch

La 141esima assemblea dei delegati e l'assemblea plenaria 2007 della SSISS si terranno venerdì 16 novembre 2007, dalle 10:00 alle 15:15 nell'aula magna del liceo cantonale di Zofingen, Strengelbacherstrasse 25B, 4800 Zofingen
http://www.kszofingen.ch/index3.htm

Il tema principale è „Formazione liceale e ricerca pedadogica".
A partire dalle 15:45 si terrà l'assemblea generale della SSIMF.
L'ordine del giorno e il programma verranno comunicati nel prossimo „Bulletin" e nel sito internet www.ssimf.ch a partire da ottobre.

VSG SSPES SSIS

VEREIN SCHWEIZERISCHER GYMNASIALLEHRERINNEN UND GYMNASIALLEHRER
SOCIETE SUISSE DES PROFESSEURS DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SOCIETÀ SVIZZERA DEGLI INSEGNANTI DELLE SCUOLE SECONDARIE

WAISENHAUSPLATZ 14, POSTFACH, 3001 BERN - TEL 031 311 07 79 - FAX 031 311 09 82
E-MAIL: sekretariat@vsg-sspes.ch

23. Mai 2007

An die Präsidentinnen und Präsidenten aller Fachvereine des VSG

141. Delegierten- und Plenarversammlung des VSG 2007 und Jahresversammlungen der Fachvereine

Gymnasiale Bildung und Bildungsforschung

Freitag, 16. November 2007, 10.00 – 15.15 Uhr
Aula, Kantonsschule Zofingen, Strengelbacherstrasse 25B, 4800 Zofingen
http://www.kszofingen.ch/index3.htm

Provisorisches Programm

09.30 – 10.00	Empfang, Café
10.00 – 10.10	Begrüssung
10.10 – 12.10	Delegiertenversammlung
12.10 – 12.30	Apéro
12.30 – 13.45	Mittagessen in der Mensa der Kantonsschule
13.45 – 14.00	Stefan Läderach, Präsident des AMV; Neues aus dem Aargau
14.00 – 15.30	Prof. Dr. Rolf Dubs, Universität St.Gallen:
(Arbeitstitel)	*Standardisierte Tests und gymnasiale Bildung*
	(Referat und Diskussion)
	Dozent/innen der PH Aargau und weitere:
(Arbeitstitel)	*Standards? – Konkret!*
	(ca. vier parallele fachspezifische Workshops)

15.45 – 18.30 max. Versammlungen der Fachvereine
Räume in der Kantonsschule Zofingen reserviert
Kontakt in der KS Zofingen: Alexander Fend

Gibelotte façon Fibonacci

Alain Stucki, Lycée cantonal de Porrentruy

Introduction

Le très médiatique *Da Vinci Code* de Dan Brown a fait connaître la suite de Fibonacci à des centaines de millions de personnes. La soudaine popularité de cette suite définie communément par récurrence et qui traduit l'augmentation de la taille d'une population de lapins m'a incité à réviser le sujet pour pouvoir y faire référence dans un cours. J'ai finalement trouvé l'occasion de présenter une manière d'établir l'expression du terme général de la suite par le biais de l'algèbre linéaire.

Une de mes classes a ainsi pu goûter un ragoût de lapin assaisonné au nombre d'or sur son lit de diagonalisation.

Je vous livre la recette de la gibelotte façon Fibonacci que j'ai cuisinée avec mes élèves.

Recherche du terme général d'une suite récurrente linéaire

Une *suite récurrente linéaire d'ordre p* est une suite du type

$$u_0, u_1, \ldots, u_{p-1},\ u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1},\ n \geq 0.$$

Par exemple, la suite de Fibonacci qui est définie par $u_0 = 1, u_1 = 1,\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 où $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$.

Intéressons-nous tout d'abord à une suite récurrente d'ordre $p = 1$

$$u_0,\ u_{n+1} = a u_n,\ n \geq 0 \text{ en posant } a = a_0.$$

Nous reconnaissons une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison a. Le terme général

$$u_n = a^n u_0$$

fournit le $(n+1)^{\text{e}}$ terme de la suite puisque l'énumération commence à u_0.

Passons à une suite d'ordre p. En posant

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{p-2} \\ u_{p-1} \end{pmatrix}, U_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+p-2} \\ u_{k+p-1} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-1} \end{pmatrix},$$

on obtient une nouvelle suite récurrente $U_0, U_{n+1} = \mathbf{A}U_n$. Observons

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-2} \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \\ \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} \end{pmatrix}.$$

Le terme général de cette suite est donné par $U_n = \mathbf{A}^n\, U_0$, comme dans le cas d'ordre $p = 1$, et nous pouvons en déduire le terme général de la suite initiale (u_n) en considérant n'importe quelle composante du vecteur U_n. Le problème se ramène finalement au calcul de $\mathbf{A}^n$, ce qui peut s'avérer très difficile (d'autres méthodes sont alors utilisées). Dans notre exemple, c'est justement ce calcul qui est intéressant.

Application à la suite de Fibonacci

Revenons à nos lapins. La matrice $\mathbf{A}$ associée à la suite de Fibonacci $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonalisable. Or, élever une matrice diagonale à la puissance n revient à élever les coefficients de la diagonale à la puissance n, ce qui est particulièrement aisé. Nous allons donc déterminer l'expression de $\mathbf{A}^n$ dans une base de vecteurs propres. Un dernier changement de base terminera le problème.

Soit le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$

$$p(x) = det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(1-x) - 1 = x^2 - x - 1.$$

Les valeurs propres λ_i sont les solutions de l'équation $p(x) = 0$. On obtient

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ (le nombre d'or) et } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi.$$

Les espaces propres E_{λ_i} s'obtiennent en résolvant le système homogène

$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 \\ 1 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_i x + y & = 0 \\ x + y(1-\lambda_i) & = 0 \end{cases}$$

Le déterminant principal de ce système est $\lambda_i^2 - \lambda_i - 1$ et vaut 0 car λ_i est solution de l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$; le système est indéterminé. En choisissant $x = 1$, il suit que $y = \lambda_i$, et il en résulte une base (v_1, v_2) de vecteurs propres où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathbf{A}'$ la matrice $\mathbf{A}$ exprimée dans la base (v_1, v_2) et $\mathbf{P}$ la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2). On obtient facilement

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, (\mathbf{A}')^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}^n$ est ensuite obtenue par le changement de base $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}(\mathbf{A}')^n\mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

en remarquant que $\lambda_1\lambda_2 = -1$.

Le terme général de (U_n) est

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

duquel nous tirons le terme général de (u_n)

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} + \lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n-1}(1+\lambda_1) - \lambda_2^{n-1}(1+\lambda_2)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$$

en remarquant cette fois que $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$, puisque ce sont les solutions de l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$.

Souvenons-nous que u_n représente le $(n+1)^{\text{e}}$ terme de la suite. Finalement, si $(t_n)_{n\geq 1}$ représente la suite de Fibonacci, le n^{e} terme est donné par la formule suivante, dite de Binet

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (1-\varphi)^n).$$

Remarques :

1) On vérifie facilement que la contribution du terme $-\frac{1}{\sqrt{5}}(1-\varphi)^n$, dont le signe alterne, est négligeable. Ainsi, le n^{e} terme de la suite peut être défini par

$$t_n \text{ est l'entier le plus proche de } \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n.$$

2) Le résultat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \varphi$$

se calcule facilement à l'aide de la formule de Binet.

Jouer avec les congruences

Marcel Délèze, Collège du Sud, Bulle

□ Règles du jeu

Demander à une autre personne d'effectuer les choix et calculs suivants:

1. Choisir un nombre dans $\{0, 1, ..., 100\}$, par exemple $s = 83$ (secret)
2. Multiplier le nombre précédent par 51: $83 \cdot 51 = 4233$ (secret)
3. Choisir un nombre naturel de quatre chiffres, par exemple 3427 (secret)
4. Additionner les deux derniers nombres: $4233 + 3427 = 7660$ (secret)
5. Du nombre du point 3, permuter les deux tranches de deux chiffres 2734 (secret)
6. Additionner les deux derniers nombres et publier le résultat $7660 + 2734 = 10394 = p$

La suite du texte explique comment retrouver le nombre s du point 1, en fonction de p.

□ Fondements mathématiques

Pour déterminer le reste de la division d'un nombre par 101, diviser le nombre en tranches de deux chiffres (depuis la droite) puis faire la somme alternée des tranches (depuis la droite). On peut itérer le procédé. Par exemple,

$$543268714 \equiv 14 - 87 + 26 - 43 + 5 \pmod{101}$$
$$\equiv -85 \pmod{101} \qquad \equiv 16 \pmod{101}.$$

En effet, on a

$$100 \equiv 101 - 1 \equiv -1 \pmod{101}$$
$$100^n \equiv (-1)^n \pmod{101} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Par suite, pour un nombre décomposé en tranches de deux chiffres, $t_i \in \{0, 1, ..., 99\}$,

$$t_0 + 100\,t_1 + 100^2\,t_2 + 100^3\,t_3 + 100^4\,t_4 + ...$$
$$\equiv t_0 + (-1)\,t_1 + (-1)^2\,t_2 + (-1)^3\,t_3 + (-1)^4\,t_4 + ... \pmod{101}$$
$$\equiv t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + t_4 + ... \pmod{101} \quad \blacksquare$$

□ Propriétés des nombres construits par les règles du jeu

Les nombres des points 3 et 5 sont opposés modulo 101.

La somme des nombres des points 3 et 5 est multiple de 101.

Les nombres des points 2 et 6 ont le même reste par division par 101.

□ Solution à l'aide des congruences

$$p \equiv 51\,s \pmod{101}$$
$$2\,p \equiv 102\,s \equiv s \pmod{101}$$
$$\boxed{s \equiv 2\,p \pmod{101}}$$

Pour l'exemple, $s \equiv 2 \cdot 10394 \equiv 2\,(94 - 3 + 1) \equiv 184 \equiv 83 \pmod{101}$.

□ Généralisation

Les critères de divisibilité pour $n \in \{11, 101, 1001, ..., 10^k + 1\}$, ainsi que leur usage dans des devinettes et tours de magie, sont connus depuis des siècles. Moyennant quelques adaptations, on peut formuler des jeux analogues pour $n \in \{9, 99, 999, ..., 10^k - 1\}$. Plusieurs exemples de chacune de ces deux familles sont donnés sur le site **http://www.collegedusud.ch/profs/delezem/** à la rubrique *Autres fichiers/Exposés /Jeux arithmétiques*.

DPK

Häufigkeit der chemischen Elemente

Martin Lieberherr
Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Als ich letzthin die Zeitung las, stiess ich auf die Rezension eines Atlanten mit Kartenanamorphoten (Anamorphosen). Man verzerrt Landkarten derart, dass der Flächeninhalt der Länder proportional zu einem Merkmal wird und Nachbarschaften erhalten bleiben. Beispielsweise könnte die Landesfläche proportional zur Einwohnerzahl oder dem Bruttosozialprodukt gezeichnet werden. Da mir die Karten sehr gefielen, wollte ich auch eine berechnen. Das Periodensystem der Elemente ist eine chemische Landkarte. Ich wollte die Kästchen entsprechend den Häufigkeiten aufblasen oder schrumpfen lassen. Ein selbst programmierter Algorithmus lieferte aber keine ästhetisch befriedigenden Resultate. Ein professionelles Verfahren stellte sich als zu aufwändig heraus. Da ich mich aber schon bei den Häufigkeiten der Elemente festgebissen hatte, verfiel ich auf folgende Idee (Abbildungen 1 und 2), die sich relativ einfach realisieren liess.

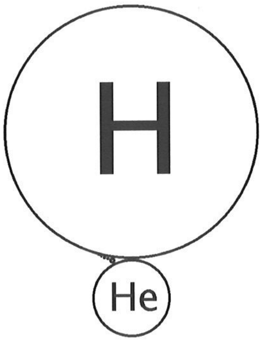


Abbildung 1: Häufigkeit der Elemente im Universum. Die Kreisflächen sind proportional zum atomaren Anteil der Elemente[1]. Bereits die auf Wasserstoff und Helium folgenden Elemente (Sauerstoff, Neon, Stickstoff, etc.) sind so selten, dass sie sich kaum mehr flächentreu darstellen lassen)

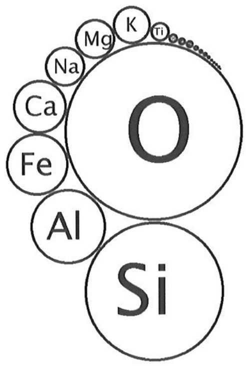


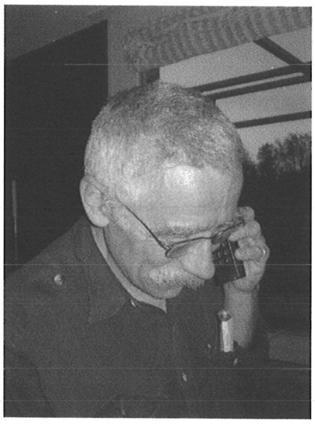
Abbildung 2: Häufigkeit der Elemente in der Erdkruste. Die Kreisflächen sind proportional zum mittleren Massenanteil der Elemente[2]. Die zwanzig häufigsten Elemente sind eingezeichnet. Die Verteilung ist markant verschieden von jener im Universum.

Quellen

[1] http://rauschrene66583.de/pse/Zusatzinfos/R04-Verbreitung(Universum).htm (Aufruf am 6. April 2007)

[2] CRC Handbook of Chemistry and Physics, 71st Edition (1990-91)

Grosses Engagement verdient grossen Dank



Als Kinder hörten wir die Eltern ehrfurchtsvoll von diesen stets hilfsbereiten doch sich nie blicken lassenden Wesen sprechen. Ich stellte mir darunter immer einen Gartenzwerg vor. Weisser Bart, rote Zipfelmütze, grünes „Sennenkutteli“, rote Hosen und gelbe Gummistiefel. Manchmal wurde uns gesagt, man dürfe das Zimmer nicht betreten, denn sie seien gerade am Werken. Wer im Stillen Gutes tat, wer wertvolle, oft mühsame und in der Regel kaum beachtete Arbeit verrichtete, durfte offenbar nicht gestört werden. Es hiess, sobald man den Heinzelmännchen beim Arbeiten zuschaue, kämen sie in Zukunft nie wieder. Auch wenn dies unseren Gwunder keineswegs verminderte, hielten wir uns daran. Nie bekam ich ein Heinzelmännchen zu Gesicht.
Mit den Jahren legte ich die Kindheit ab, aus den Heinzelmännchen wurden Heinzelmannen und -frauen. Sie werken immer noch, manche sind sogar sichtbar – man spricht von ehrenamtlichem Arbeiten. Die Früchte solchen Schaffens halten Sie, lieber Leser und Sie, liebe Leserin, alle drei Monate in den Händen. Ganze acht Jahre war Alfred Vogelsanger DMK-Redaktor für das Bulletin. Mit grossem Fingerspitzengefühl pflegte er den Kontakt zu Autoren und Autorinnen. Die eingereichten Beiträge redigierte er exakt, termingerecht und fachlich kompetent, handgeschriebene Versionen brachte er auch mal eigenhändig in elektronische Form und immer wieder gelang ihm das Akquirieren besonders interessanter und bereichernder Artikel.
Auf Ende 2006 trat Alfred Vogelsanger aus der DMK und als Folge auch aus der Redaktion des Bulletins zurück. Dieser Rücktritt schmerzt. Mit Alfred Vogelsanger geht nicht nur viel Erfahrung und Wissen verloren, vielmehr scheidet ein ausserordentlich tiefsinniger, vielseitiger, engagierter und humorvoller Mensch aus der DMK und aus der Bulletin-Redaktion. Wir schätzen ihn und seine Arbeit sehr und danken ihm von Herzen für seinen grossen Einsatz und die dafür aufgewendete Zeit.

Deine Weggefährten aus der DMK

2007=1+3+8+21+377+1597

Bernhard Ruh, Kantonsschule Solothurn

Einleitung

Manchmal ist es unvermeidlich, einem Schüler - aus welchen Gründen auch immer - eine zusätzliche Aufgabe aufzuerlegen. Wenn man diesem Schüler nicht einfach ein Algebrabuch in die Hand drückt, erweisen sich solche Zusatzaufgaben nicht selten als Bumerang, da mathematische Probleme ausserhalb des Schulstoffes auch für die Lehrperson ihre Tücken haben können. Etwas naiv drückte ich meinem Schüler ein Buch mit Aufgaben von früheren Mathematikolympiaden in die Hand, welches zu seinem (und meinem!) Glück neben den Aufgaben auch ein paar Lösungshinweise enthielt. Der Auftrag lautete, in einem Vortrag eine frei gewählte Aufgabe und ihre Lösung vorzustellen. Besagter Schüler (er zählte zu der Sorte der eher Faulen aber Intelligenten) wählte eine Aufgabe, deren Lösung er bis zur zweitletzten Zeile verstand. Die letzte Zeile lautete: "Mit dem Satz von Zeckendorf folgt die Behauptung". Natürlich wollte er von mir wissen, wie der Satz von Zeckendorf lautet. Auf solche Fragen kann man auf zwei Arten reagieren: Entweder man murmelt etwas von Zeitmangel und verschiebt die Sache auf übermorgen oder man ergibt sich dem Schicksal und gesteht, den Satz nicht zu kennen. In meinem Fall rang dies dem Schüler ein müdes und auch etwas mitleidiges Lächeln ab.

Um Ihnen diese Situation zu ersparen, sei hier der Satz von Zeckendorf vorgestellt.

Darstellung durch Fibonacci-Zahlen

Wir wollen eine Zahlenfolge von verschiedenen natürlichen Zahlen *vollständig* nennen, wenn jede natürliche Zahl als Summe von verschiedenen Folgegliedern dargestellt werden kann. Die bekannteste vollständige Zahlenfolge ist die Folge der Zweierpotenzen $1, 2, 4, 8, \ldots$. In diesem Fall ist die Darstellung sogar eindeutig (Binärdarstellung). Weniger bekannt ist die Tatsache, dass auch die Primzahlen, um die Zahl 1 erweitert, vollständig sind (Postulat von Bertrand [1]). Die Darstellung ist natürlich nicht eindeutig: $6 = 5 + 1 = 3 + 2 + 1$, $2007 = 2003 + 3 + 1 = 1999 + 7 + 1$ etc.

Wie sieht es nun bezüglich Vollständigkeit mit der Fibonaccifolge $(f_i) = 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ aus? (Die zweite 1 am Anfang der Originalfolge macht in unserem Zusammenhang keinen Sinn.)

Schreibt man sich einige Darstellungen auf,

n	Darstellungen			Anzahl
1	1			1
2	2			1
3	3	2+1		2
4	3+1			1
5	5	3+2		2
6	5+1	3+2+1		2
7	5+2			1
8	8	5+3	5+2+1	3

so merkt man schnell:

Satz 1 *Die Folge der Fibonaccizahlen, definiert durch*

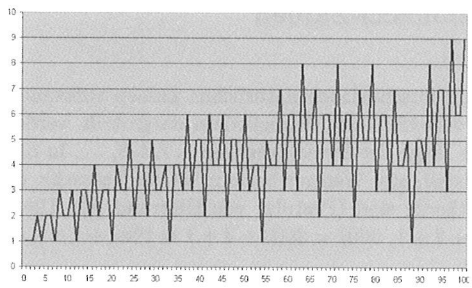
$$f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,$$

ist vollständig.

Der Beweis erfolgt rekursiv nach dem Motto: Für jede natürliche Zahl $f_k \leq n < f_{k+1}$ ist $n - f_k < f_{k+1} - f_k = f_{k-1}$.

Bemerkungen

- Der "Maximalalgorithmus" (ziehe immer die grösstmögliche Fibonaccizahl ab) liefert immer eine Darstellung ("Maximaldarstellung").
- Bei den Zahlen 1,2,4,7,... ist die Darstellung eindeutig.
- Die Anzahl der Darstellungen von Fibonaccizahlen hat das Muster $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$
- Auch die Folge $1, 3, 8, 16, 24, \ldots$ ist interessant. (Kleinste Zahl, die $1, 2, 3, \ldots$ Darstellungen besitzt).
- Der Graph $(n, \mathit{AnzahlDarstellungen})$ macht einen selbstähnlichen Eindruck.



- Die Zahl 2007 hat 6 Darstellungen ([3]), z.B. $2007 = 1 + 3 + 8 + 21 + 377 + 1597 = 1 + 3 + 8 + 21 + 144 + 233 + 1597$.

Das Fibonaccimalsystem

Auf Grund der Vollständigkeit lassen sich die Zahlen der Fibonaccifolge $(\ldots, 13, 8, 5, 3, 2, 1)$ als Basis eines Zahlensystems mit den Ziffern 0 und 1 interpretieren. Man schreibt z.B.

$$11 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 10100_{\text{fib}}.$$

Diese Darstellung ist aber leider nicht eindeutig: $10100_{\text{fib}} = 1111_{\text{fib}}$

Eindeutig ist hingegen die oben erwähnte Maximaldarstellung:

n	Max.Darst.
1	1
2	10
3	100
4	101
5	1000
6	1001

n	Max.Darst.
7	1010
8	10000
9	10001
10	10010
11	10100
12	10101

$2007 = 11001000001010101_{\text{fib}}$

Edouard Zeckendorf (1901-1983), ein belgischer Arzt(!), bemerkte in diesen Darstellungen eine Gemeinsamkeit: Es folgen nie zwei 1 aufeinander, was seinen Satz entstehen liess [2]:

Satz 2 (von Zeckendorf) *Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Summe von nicht aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen schreiben.*

Beweis: Die Existenz wird durch den Maximalalgorithmus garantiert. Die Eindeutigkeit folgt etwa so: Ist $f_k \leq n < f_{k+1}$, so muss f_k in der Darstellung von n auftreten, da ansonsten die grösstmögliche darstellbare Zahl gleich

$$n' = f_{k-1} + f_{k-3} + \dots$$

wäre. Nun gelten aber die bekannten Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1, \quad \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n} - 1$$

und somit $n' < f_k$.

Anwendungen

Das Fibonacci Nim-Spiel

Von einem Haufen mit n Münzen darf jeder Spieler eine Anzahl Münzen entfernen, beim ersten Zug nicht alle und bei jedem weiteren Zug höchstens doppelt so viele wie der Gegner. Wer die letzte Münze nehmen kann, hat gewonnen. Man sieht sofort, dass der Spieler, der bei 1, 2, 3, 5, 8 Münzen ziehen muss und nicht alle Münzen wegnehmen darf, verloren hat. Man kann durch Induktion sehr einfach zeigen, dass alle Fibonaccizahlen verlieren. Die Strategie wird in der "Fibonaccimalschreibweise" klar: Entferne von rechts her möglichst oft die Zahl 1 (ohne dass der Gegner das Spiel beenden kann). Es ist also das Ziel, eine Fibonaccizahl oder zumindest eine möglichst einfache Summe von Fibonaccizahlen zu erhalten.

Beispiel (n=32):

n	fib	Bemerkung
32	1010100	10100 ist zu gross, also entferne ich 100=3
29	1010000	Der Gegner darf nicht 10000=8 wegnehmen, er nimmt z.B. 100=3
26	1001000	Ich nehme 1000
21	1000000	... und gewinne

Zum Schluss sei noch die Aufgabe aus der Mathematikolympiade vorgestellt. Ambitionierte Leserinnen und Leser versuchen natürlich, die Aufgabe selbständig zu lösen.

Eine IMO Aufgabe

Problem: Ist es möglich, die natürlichen Zahlen als disjunkte Vereinigung von Lucas-Folgen (Folgen mit $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, beliebige Startwerte) zu schreiben?

Erster Versuch:
$f^{(1)} : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \quad f^{(2)} : 4, 6, 10, 16, 26, 42, \ldots \quad f^{(3)} : 7, 9, 16, \ldots$

Es wird schnell klar, dass es mit endlich vielen Folgen nicht geht, da die Lücken mit der Zeit zu gross werden. Der obige Versuch mit unendlich vielen Folgen funktioniert nicht, da die Folgen nicht disjunkt sind ($16 \in f^{(2)} \cap f^{(3)}$).

Zweiter Versuch:
Es sei (a_i) die Folge der Zahlen, deren Fibonaccimaldarstellung mit einer 1 endet, also $a_1 = 1_{fib} = 1, a_2 = 101_{fib} = 4, a_3 = 1001_{fib} = 6$ etc. Das k-te Glied der Folge $f^{(i)}$ hat die Fibonaccimaldarstellung von a_i gefolgt von $k-1$ Nullen:

	Fibonaccimal	Dezimal
$f^{(1)}$	$1, 10, 100, 1000, \ldots$	$1, 2, 3, 5, \ldots$
$f^{(2)}$	$101, 1010, 10100, 101000, \ldots$	$4, 7, 11, 18, \ldots$
$f^{(3)}$	$1001, 10010, 100100, 1001000, \ldots$	$6, 10, 16, 26, \ldots$

Die so konstruierte Folge von Lucas-Folgen(Begründung!) erfüllt die verlangten Bedingungen!

Literatur

[1] www.matha.rwth-aachen.de/lehre/SS01/ana3proseminar/bertrand.ps

[2] E. Zeckendorf. *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 41, 179-182, 1972.

[3] www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibrep.html

Die Euler-Ausstellung der Alten Kantonsschule Aarau

von Dr. H. Hunziker

Einer der anpackt: Die Pariser Akademie schrieb 1726 eine Preisfrage zur günstigsten Bemastung von Schiffen aus. Euler war damals gerade im Alter eines Maturanden und kühn genug, sich damit zu beschäftigen. Zum ersten Mal zeigten sich hier Eulers grosse Gaben: Mut und Zuversicht, sich auf Problemstellungen einzulassen, für die keine offensichtlichen Lösungsansätze existieren und ein ausserordentliches Gespür im Auffinden neuer Wege und die notwendige Kraft und Ausdauer, diese bis zu Ende zu gehen. Zwar vergab die Pariser Akademie den ersten Preis nicht an Euler, immerhin wurde seine Arbeit ausgezeichnet und seine muntere und zupackende Art wurde zu seinem Markenzeichen und zur Basis für seine unzähligen späteren Erfolge. In dieser Beziehung ist er leuchtendes und anspornendes Vorbild, nicht nur für Maturandinnen und Maturanden.

Gedenkmarke mit der Eulerschen Polyederformel

Euler auf Schritt und Tritt: Eulers Schaffen ist derart vielfältig und nachhaltig, dass heute kaum ein mathematisches Werk aufgeschlagen werden kann, ohne auf Zeugnisse seines Wirkens zu stossen. Nebst Zahlen sind Funktionen die zentralen Objekte der Mathematik. Der moderne Funktionsbegriff

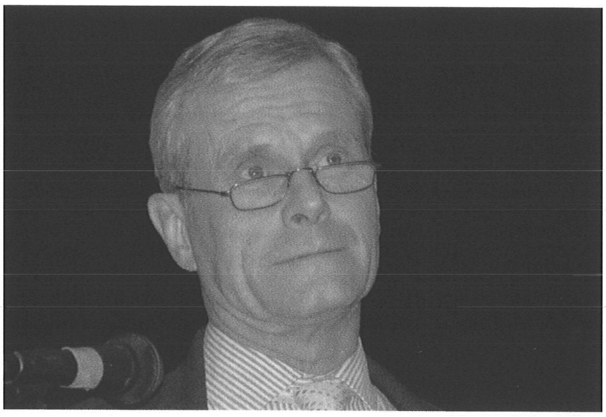
> *Ist jedem Element x einer Menge D in eindeutiger Weise ein Element f(x) einer Menge W zugeordnet, so nennt man f eine Funktion.*

entwickelte sich erst im 19. Jahrhundert. Euler arbeitete somit noch nicht mit dieser Begriffsversion, sein Verständnis der Funktion kam aber der heutigen Vorstellung schon recht nahe und insbesondere geht die Schreibweise *f(x)* auf ihn zurück. Viele weitere Begriffe und Bezeichnungen wurden von ihm geprägt oder fanden durch seine intensive Publikationstätigkeit Verbreitung.

- $i = \sqrt{(-1)}$: imaginäre Einheit
- e : Basis des natürlichen Logarithmus
- Σ: Summenzeichen
- sin *x*, cos *x*, tg *x*: Winkelfunktionen als Verhältniszahlen

Die Aarauer Euler-Ausstellung: Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel geboren, gestorben ist er im Herbst 1783 in St. Petersburg. Sein Geburtstag jährt sich somit zum 300. Mal. Die Alte Kantonsschule Aarau an der Bahnhofstrasse 91 in Aarau beteiligt sich mit einer Ausstellung am Euler-Jahr. Ziel ist es, den grossen Schweizer Gelehrten und sein Werk einer breiteren Öffentlichkeit, speziell Schülern und Schülerinnen, näher zu bringen.

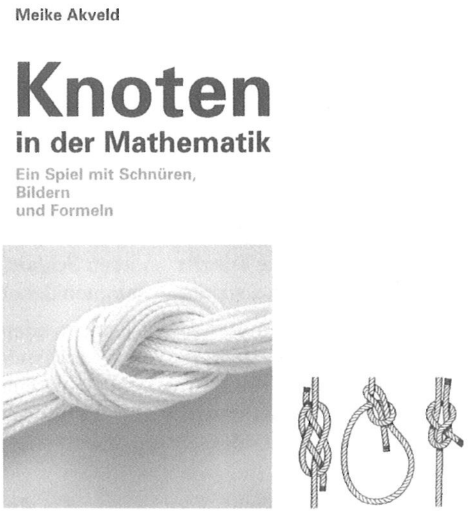
Die Ausstellung im 1. Stock des Paul Karrer-Hauses wurde am 15. März feierlich eröffnet. Hauptreferent war Prof. Hanspeter Kraft, Präsident der schweizerischen Euler-Kommission. Die Ausstellung kann bis Ende 2007 während den Unterrichtszeiten jeweils werktags von 08.00 -17.00 Uhr besichtigt werden. Der Eintritt ist frei. Im Kern besteht die Ausstellung aus sechs grossformatigen Informationstafeln, die in anregender Art über Leben und Werk des grossen Gelehrten berichten. Die Tafelelemente sind geeignete Ausgangspunkte für gymnasiale Unterrichtssequenzen, sie können von der Euler-Seite der Fachschaft Mathematik der Alten Kantonsschule Aarau herunter geladen werden: http://mathematik.alte-kanti-aarau.ch.



Prof. Hp. Kraft, Präsident Euler-Kommission
Foto: M. Suter

Knoten in der Mathematik – Ein Spiel mit Schnüren, Bildern und Formeln

Meike Akveld, in Zusammenarbeit mit Peter Gallin, Themenheft Topologie der DMK (Deutschschweizerische Mathematikkommission), 72 Seiten; Zürich, Orell Füssli, 2007, ISBN 978-3-280-04050-8.



Das vierte Themenheft der Deutschschweizerischen Mathematikkommission ist einem interessanten Teilgebiet der Topologie gewidmet. Die Mathematikerin Meike Akveld gibt mit diesem schönen Heft den Schweizer Gymnasien ein attraktives Arbeitsbuch in die Hände. Damit kann in Blockkursen und Spezialwochen ein spannendes, nicht zum Curriculum gehörendes Gebiet der Mathematik beleuchtet werden.

Die Knotentheorie ist ein aktuelles mathematisches Forschungsgebiet mit vielen wichtigen Anwendungen in der Biochemie und der theoretischen Physik, aber auch in der Geometrie.

Die Knotentheorie beschäftigt sich nicht einfach mit dem Knüpfen von Knoten, sondern sie fasst Knoten als mathematische Gebilde auf. Ein Knoten kann man sich vorstellen als geschlossene Kurve im Raum, also eine Schnur mit verbundenen Enden oder sogar mehrere Schnüre, aber immer ohne offene Enden.

Dargestellt werden Knoten durch ihre Projektion auf eine Ebene, wobei bei jeder Kreuzung wichtig ist, welcher Teil der Kurve oben oder unten liegt. Zwei Knoten sind gleich, wenn sie durch stetige Deformation ineinander überführt werden können, was so viel heisst, wie Schnurstücke hin und her schieben, so dass neue Kreuzungen entstehen können oder alte aufgehoben werden. Das Ziel der Knotentheorie ist es, herauszufinden, ob zwei Knoten gleich sind oder nicht. Dies ist kein leichtes Unterfangen.

Die erste wesentliche Erkenntnis stammt von Kurt Reidemeister, der 1928 herausfand, dass man im Wesentlichen mit drei verschiedenen Arten von Deformationsschritten, den so genannten Reidemeister-Schritten, Knoten deformieren kann. Man kann ein Knotenstück verdrillen, man kann eine Schlinge über eine andere ziehen, man kann ein Schnurstück über eine Kreuzung schieben und man kann diese drei Bewegungen auch umgekehrt durchführen. Durch geschicktes Anwenden dieser drei Bewegungen kann man herausfinden, ob zwei Knoten gleich sind. Dass dies nicht nur zufällig erfolgt, sondern auch mathematisch untersucht wird, lernt man in diesem Buch.

Die Autorin erklärt auf ansprechende Art, wie die jungen Leute an die Probleme herangehen sollen und führt auf recht spielerische Weise in die Problematik der Knotentheorie ein. Für die ersten sechs Kapitel braucht man keine mathematischen Vorkenntnisse, so dass diese sehr geeignet wären für die Sekundarstufe I oder das Untergymnasium. Ich kann mir gut vorstellen, dass während einer Sonderwoche mit diesem Buch gearbeitet werden kann und dass auch Leute Freude an Mathematik erhalten, die unserem Fach eher negativ gegenüberstehen. Auch fördert dieses Buch das räumliche Vorstellungsvermögen, das im normalen Unterricht meistens zuwenig geübt wird.

Das letzte Kapitel hebt sich in seinem Schwierigkeitsgrad deutlich von den übrigen ab. Hier wird erst sichtbar, warum die Knotentheorie ein wichtiges mathematisches Gebiet ist. Das eigentliche Ziel ist es nämlich, mathematische Objekte zu finden, die sich bei Deformation nicht ändern; dies sind so genannte Invarianten. Solche Objekte sind zum Beispiel bestimmte Polynome. Die Jones-Polynome, die 1984 vom neuseeländischen Mathematiker Vaughan Jones entdeckt wurden, werden im letzten Kapitel eingeführt. Leider ist dieses Kapitel gemessen an seinem Schwierigkeitsgrad etwas kurz geraten, so dass man das Gelernte nicht mehr wirklich auf schwierigere Probleme übertragen kann.

Ich empfehle dieses interessante Buch, wie schon gesagt, vor allem für jüngere Schülerinnen und Schüler. Diese werden Spass am Spiel mit Knoten haben und werden mit Freude die mathematischen Eigenschaften erproben. Sie werden, auch wenn sie noch nicht genau wissen, was Polynome sind, gespannt auf die Fortsetzung ihres Mathematikunterrichts warten.

Johanna Schönenberger-Deuel

Grisha Perelman und die Poincaré-Vermutung

Dr. Markus Kriener, Wettingen

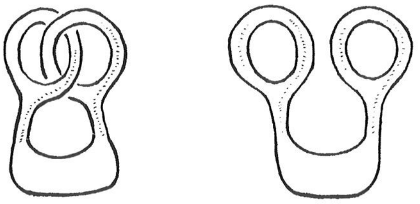
Der russische Mathematiker Grigorij Perelman hat die Poincaré-Vermutung bewiesen, ein seit über hundert Jahren offenes Problem aus der Topologie. Perelman wurde zum Medienereignis, nicht zuletzt wegen seiner exzentrischen Persönlichkeit und trotz seiner Bemühungen, sich dem Zugriff der Medien zu entziehen. Im August 2006 lehnte er die Fields-Medaille ab, das mathematische Pendant zum Nobelpreis; noch zweifelhaft ist, ob er ein auf die Lösung des Problems ausgesetztes Preisgeld von einer Million Dollar ebenfalls zurückweisen wird. Vollends zum wissenschaftssoziologischen Lehrstück geriet der Fall durch die Versuche einer Gruppe chinesischer Mathematiker um den in Havard lehrenden S.T. Yau, im nachhinein ein Stückchen vom Ruhm zu ergattern.

Die Poincaré-Vermutung

Mais cette question nous entraînerait trop loin.
Henri Poincaré

Was eigentlich ist Topologie?

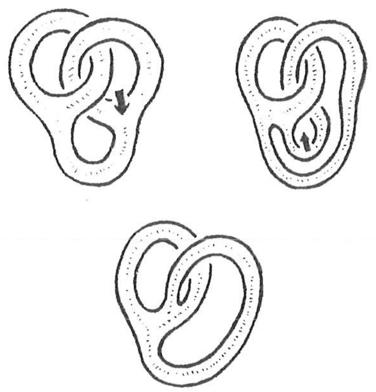
Hier ist ein typisches topologisches Problem: Kann man diese beiden Objekte ineinander verwandeln?



Vielleicht werden Sie sagen: "Das ist doch keine Kunst. Man muss nur die eine Schlaufe zerschneiden, die beiden Arme aus der anderen Schlaufe herausnehmen und dann wieder zusammenkleben."

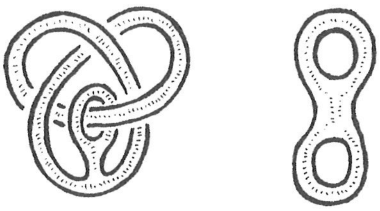
Aber kommt man auch *ohne* Zerschneiden aus? Sie dürfen allerdings *sehr* grosszügig deformieren - stellen Sie sich vor, die Objekte seien aus einer extrem elastischen Knetmasse. Vielleicht haben Sie ja Lust, sich das einen Moment zu überlegen, bevor Sie weiterlesen.

Es geht tatsächlich: Vergrössern Sie die eine Schlaufe so lange, bis Sie sie durch die andere herausziehen können.



Und wie sieht es bei folgendem Beispiel aus? Versuchen Sie, ob Sie diese etwas spezielle Brezel nur durch Deformieren entwirren können[1]:

[1] Die Lösung und weitere Rätsel dieser Art findet man in dem auch für den Mathematikunterricht brauchbaren Büchlein ?.



In der *Topologie* fragt man sich, was für charakteristische Eigenschaften von einem geometrischen Objekt übrigbleiben, wenn man nicht nur von Lage und Grösse, sondern auch von der Form abstrahiert[2]. Alle Objekte oben haben zum Beispiel zwei Löcher - und die lassen sich nicht wegbringen, da kann man deformieren, so lange man will.

Ein Planeten-Archipel

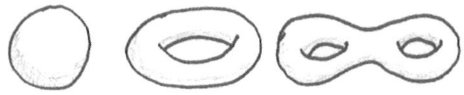
Zur Verdeutlichung der Aussage der Poincaré-Vermutung lassen Sie mich die folgende Geschichte erzählen:

Durch eine Reihe von Zufällen hat es Sie vor einiger Zeit nach *Flächonien* verschlagen, einem höchst bemerkenswerten Sonnensystem in einer entlegenen Galaxie[3]. Hier kommen Planeten in den unmöglichsten Formen vor - die Brezeln aus dem vorhergehenden Abschnitt gehören noch zu den harmloseren Beispielen. Die Planeten sind klein und so zahlreich, dass die Bewohner von Flächonien ein ganzes Archipel dieser Kleinstplaneten besiedelt haben und mit ihren Raumschiffen interplanetarischen Handel treiben.

Die politischen Verhältnisse sind auf den ersten Blick sehr einfach. Nach langen Wirren haben sich zwei Staaten gebildet: *Sphäria* und *Löchria*. Die Zugehörigkeit zu einem dieser Staaten wird durch den topologischen Typ des Planeten geregelt:

- Wenn er im wesentlichen eine sphärische Form[4] hat (egal wie deformiert), dann gehört der Planet zu Sphäria.
- Wenn er eines oder mehrere Löcher hat, gehört er zu Löchria[5].

Hier sehen Sie drei der etwas konventioneller geformten Planeten:



Hintergrund ist natürlich die Klassifikation kompakter, orientierbarer Flächen, vgl. zum Beipiel ?: Wenn sich eine Fläche (ohne Rand) im dreidimensionalen Raum realisieren lässt, dann ist ihr topologischer Typ durch die Anzahl der Löcher eindeutig bestimmt: Die drei abgebildeten Flächen oben sind die ersten, die vorkommen - mit null, eins bzw. zwei Löchern.

Virtuelle Lassos

Der Verkehr zwischen den Planeten ist immens, und es kann vorkommen, dass man plötzlich nicht mehr weiss, in welchem Staat man sich befindet[6]. Zu diesem Zweck ist in jedem Raumschiff ein raffiniertes Instrument eingebaut, das *virtuelle Lasso*. Aktiviert man es, so schickt es einen elektromagnetischen Strahl aus, der sich um den gesamten Planeten wickelt und schliesslich wieder zum Raumschiff zurückkehrt. Ist dies geschehen, versucht das Gerät, das ausgeworfene "Lasso" zusammenzuziehen. Auf den Planeten, die zu Sphäria gehören, gelingt dies immer tadellos. Ist man jedoch in Löchria, wird es vorkommen, dass der Strahl sich durch eines der Löcher gewunden hat und sich das Lasso also nicht zusammenziehen lässt. Dies erkennt das Gerät und lässt verlauten, man sei in Löchria. Da das Lasso einige hundert mal in der Minute in alle möglichen Richtungen ausschickt wird, kann man nach einigen Minuten mit einer sehr grossen Wahrscheinlichkeit entscheiden, in welchem Staat man sich befindet[7].

Es war übrigens lange Gegenstand eines wissenschaftlichen Disputs, ob man auf diese Weise wirklich Sphären von Nicht-Sphären unterscheiden kann. Dies wird vielleicht verständlicher vor dem Hintergrund des folgenden Phänomens:

[2]Von Lage und Grösse abstrahiert man ja schon in der gewöhnlichen Geometrie, wenn man von kongruenten und ähnlichen Dreiecken spricht.

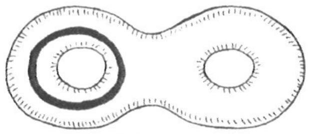
[3]Denken Sie etwa an *Douglas Adams: The Hitch-Hiker's Guide to the Galaxy*. Oder aber an *E. A. Abbott: Flatland. A romance of many dimensions.*

[4]Eine **Sphäre** ist die Oberfläche einer Kugel.

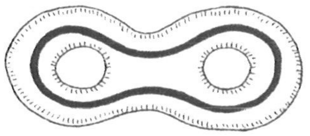
[5]Eine bemerkenswerte Besonderheit von Löchria ist, dass sich der Staat in eine *unendliche* Anzahl von Kantonen aufgeteilt hat - *Toria* und *Brezlia* und so weiter. Die Zugehörigkeit wird durch die Anzahl der Löcher geregelt.

[6]Bei den etwas exotischer geformten Exemplaren war es zur Zeit der Staatengründung alles andere als trivial, die Staatszugehörigkeit zu entscheiden. Zudem sind sich in Löchria diverse Planeten noch heute nicht im Klaren darüber, zu welchem Kanton sie gehören.

[7]Hintergrund ist die Tatsache, dass sich Flächen via Fundamentalgruppe unterscheiden lassen.



(a)



(b)

Man kann die Brezel mit dem aufgemalten Lasso in Bild (a) so deformieren, dass man in der Situation aus Bild (b) ankommt. Versuchen Sie es[8] !

Ist das Universum eine 3-Sphäre?

Die spezielle Natur der "Geographie" flächonischer Planeten legt es nahe, sich ausgiebig Gedanken über die Form des Universums zu machen. Dazu muss man wissen, dass es für die Bewohner dieser Gegend ausgemachte Sache ist, dass das Universum keinen Rand hat, also nirgendwo aufhört. Man kann also im Prinzip immer geradeaus laufen, ohne jemals an ein Ende des Universums zu kommen. Andererseits ist es endlich, d.h. es hat ein endliches Volumen. Des Rätsels Lösung: Der Weltraum ist gekrümmt und schliesst sich wieder in sich selbst; man würde nach einer sehr langen Reise "immer der Nase nach" wieder genau an seinen Ausgangspunkt zurückkehren. Tatsächlich hat das Universum möglicherweise die Form einer 3-Sphäre, dem dreidimensionalen Analogon zur gewöhnlichen Sphäre oder 2-Sphäre:

- die 3-Sphäre hat ein endliches Volumen, die 2-Sphäre hat eine endliche Fläche
- beide haben keinen Rand
- und bei beiden gilt: Wenn man genügend lange geradeaus läuft, kommt man schliesslich wieder an seinen Ausgangsort zurück.

Sollte das Universum tatsächlich eine 3-Sphäre sein, wäre es durchaus möglich, dass einer der Sterne, die wir durch unsere Teleskope sehen, unsere eigene Sonne ist. Oder genauer: Was wir aus dem Weltraum empfangen, sind Lichtstrahlen, die unsere Sonne vor sehr langer Zeit ausgesandt hat und die jetzt wieder an den Ort ihrer Entstehung zurückgelangt sind.

[8]Die Lösung findet sich wieder in ?.

Wie soll man sich eine 3-Sphäre vorstellen?

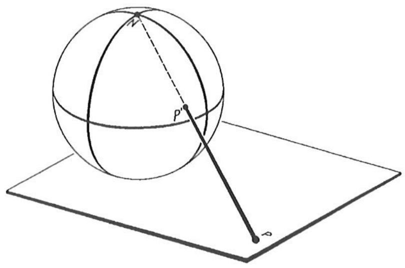
Die Bewohner Flächoniens haben verschiedene Antworten auf diese Frage - alle gehen von einer anderen Methode aus, eine gewöhnliche 2-Sphäre zu konstruieren und übertragen diese Methode dann auf die nächsthöhere Dimension.

Punktweise Konstruktion: Eine 2-Sphärc besteht aus allen Punkten des 3-dimensionalen Raumes mit einem bestimmten Abstand zu einem ausgezeichneten Punkt, dem Mittelpunkt. Eine 3-Sphäre besteht demnach aus allen Punkten im 4-dimensionalen Raum, die einen bestimmten Abstand zum Mittelpunkt haben. Problem: Wie stellt man sich einen 4-dimensionalen Raum vor?

Verkleben am Rand: Eine 2-Sphäre lässt sich zerlegen in eine obere und eine untere Hälfte - Nordhalbkugel und Südhalbkugel, gemeinsamer Rand ist der Äquator. Man kann sich also umgekehrt eine 2-Sphäre basteln, indem man zwei Kreisscheiben erst etwas verbeult und dann entlang des Ränder verklebt; die Nahtstelle wird also ein Kreis. Analog erhält man eine 3-Sphäre, wenn man zwei Vollkugeln entlang ihrer Ränder verklebt - die Nahtstelle wird dann eine 2-Sphäre. Problem: Man muss eine der beiden Vollkugeln so verbeulen, dass das Innere sich nach aussen kehrt wie ein Handschuh, dazu muss man wieder durch die vierte Dimension; auch beim Verbeulen der Kreisscheiben musste man ja in die dritte Dimension ausweichen.

Zwiebelschalenkonstruktion: Eine 2-Sphäre lässt sich in lauter 1-Sphären zerlegen (die Breitenkreise) plus zwei Ausnahmepunkte - Nord- und Südpol. Man kann sich umgekehrt auch vorstellen, dass aus dem Südpol (einer 0-Sphäre) immer grösser werdende 1-Sphären nach oben wachsen, die nach Überschreiten des Äquators wieder kleiner werden und schliesslich im Nordpol wieder zu einer 0-Sphäre degenerieren. Genauso kann man sich eine 3-Sphäre zusammengesetzt denken aus einem Startpunkt, vielen erst grösser und dann wieder kleiner werdenden 2-Sphären und schliesslich einem Endpunkt. Übrigens wäre die nächste Stufe eine unserer aktuellen Vorstellungen von Vergangenheit und Zukunft des Kosmos: Wir haben einen Startpunkt (den *Big Bang*), dann eine sich erst ausdehnende 3-Sphäre (unser Universum), welche sich möglicherweise irgendwann wieder zusammenzieht, bis sie schliesslich in einem Endpunkt verschwindet (dem *Big Crunch*). Die gesamte Raumzeit hätte dann übrigens die topologische Form einer 4-Sphäre.

Hochklappen: Man kann die 2-Sphäre auch aus einer unendlichen Ebene plus einem einzelnen Punkt konstruieren: Man stelle sich eine gläserne Sphäre auf der Ebene ruhend vor.



Wenn man auf dem Nordpol N steht (N liegt dem Auflagepunkt genau gegenüber), dann sieht man die Ebene nur, wenn man durch die Sphäre hindurch schaut. Fasst man einen beliebigen Punkt P der Ebene ins Auge, so schneidet die Verbindungsgerade NP die Sphäre in einem eindeutig bestimmten Schnittpunkt P'. Entlang dieser Verbindungsgeraden kann man die Ebene auf die Sphäre "hochziehen", wie an unendlich vielen Marionettenfäden sozusagen. Zur Vervollständigung benötigt man als "Stöpsel" noch einen einzelnen Punkt N[9]. Ganz analog kann man den sich in alle Richtungen ins Unendliche erstreckenden dreidimensionalen Raum auf die endliche dreidimensionale Sphäre "hochziehen".

Eine grosse Mehrheit der Wissenschaftler Flächoniens vertritt die Meinung, dass das Universum die Form einer 3-Sphäre hat. Einige jedoch meinen, dass es eine kompliziertere Form haben könnte. Irgendetwas Interessantes mit "dreidimensionalen Löchern"[10].

Intergalaktische Lassos und die Poincaré-Vermutung

Schon bald kam jemandem der Einfall, die bewährten virtuellen Lassos zur Klärung dieser kosmologischen Grundfrage zu verwenden:

"Lasst uns gewaltige *intergalaktische Lassos* in den Weltraum schicken. Wenn wir eines davon *nicht* zusammenziehen können, dann wissen wir jedenfalls mit Sicherheit, dass das Universum *keine* 3-Sphäre ist."

Gesagt, getan. Allerdings: Jedes Lasso, das man über die Jahre hinweg ausgeworfen hatte, *liess* sich zusammenziehen. "Wunderbar", frohlockte der von Natur aus optimistische Forschungsminister, " also ist das Universum eine 3-Sphäre!"

Die Gelehrten um ihn herum schüttelten betrübt die Köpfe. "Unser Universum ist offenbar ein dreidimensionaler Raum von unbekannter Form" begannen sie zögernd. "Wir nennen so etwas eine **3-Mannigfaltigkeit**. In zwei Dimensionen, also bei Flächen bzw. 2-Mannigfaltigkeiten, wissen wir: Wenn sich jedes Lasso zusammenziehen lässt (übrigens nennen wir diese Eigenschaft einer Fläche **einfach zusammenhängend**), wenn also eine Fläche einfach zusammenhängend ist, dann muss es die 2-Sphäre sein." Ein junger Wissenschaftler mit Pferdeschwanz ergänzte: "Wir wissen das, weil wir alle möglichen topologischen Typen von 2-Mannigfaltigkeiten kennen, wir haben sie *klassifiziert*." Ein Graubart führt den Bericht fort: "Und zwar schon vor mehr als hundert Jahren. Bei 3-Mannigfaltigkeiten sind wir noch nicht so weit. Wir sind uns noch immer nicht sicher, ob wir alle möglichen Typen kennen. Vielleicht gibt es ausser der 3-Sphäre noch eine weitere, völlig exotische 3-Mannigfaltigkeit, die ebenfalls einfach zusammenhängend ist, aber eben nicht die 3-Sphäre."

Der Forschungsminister blickt etwas ratlos. "Wir können also nichts sagen?" Die Gelehrten schütteln die Köpfe. "Und was brauchen wir?" "Eine Klassifikation!" ruft der junge Wissenschaftler mit Pferdeschwanz. "Oder zumindest einen Beweis der Poincaré-Vermutung," fügt der Graubart bedächtig hinzu. Der Forschungsminister blickt ihn ein weiteres mal fragend an. Der Graubart verfällt in eine

[9]Diese Abbildung nennt man *stereographische Projektion*. Es ist eine ausgesprochen interessante Abbildung. Sie ist zum Beispiel sowohl *kreistreu* (Kreise auf der Sphäre werden auf Kreise auf der Ebene abgebildet) als auch *winkeltreu* (Winkel auf der Sphäre werden auf die gleichen Winkel auf der Ebene abgebildet) ist, siehe ?.

[10]Spekulationen dieser Art stammen selbstverständlich allesamt von Bewohnern Löchrias

Art Singsang:

> **Die Poincaré-Vermutung:** Jede kompakte, einfach zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

"*Kompakt* heisst so viel wie *endlich*" meint der Pferdeschwanz. "So wie unser Universum. Wenn man nur lange genug in die gleiche Richtung geht, kommt man irgendwann wieder an seinen Ausgangspunkt zurück. Jedenfalls fast, " fügt er noch eilig hinzu, als er bemerkt, wie sich die Augenbrauen des Graubarts fast unmerklich zusammenziehen[11]. "Und *homöomorph* heisst so viel wie *gleiche Form* - im topologischen Sinne, also bis auf Deformationen."

Die gute Nachricht

Als Sie kürzlich wieder einmal nach Flächonien reisten, kam Ihnen der Graubart strahlend entgegen: "Ein russischer Mathematiker hat die Poincaré-Vermutung bewiesen." Die Augen seines Kollegen mit dem Pferdeschwanz funkelten: "Und zusätzlich Thurstons Geometrisierungs-Vermutung. Wir haben jetzt also eine Klassifikation." Der Graubart schüttelt wieder einmal bedächtig den Kopf. "Das ist noch nicht so sicher. Aber sehr gut möglich. Bei der Poincaré-Vermutung sind wir uns aber inzwischen sicher - der Beweis ist wasserdicht."

Die Poincaré-Vermutung: Stationen auf dem Weg zu einem Beweis

1895 Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) führt das Konzept der *Fundamentalgruppe* ein.

1900 Er behauptet unvorsichtigerweise, dass eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit[12] mit der *Homologie* einer 3-Sphäre auch schon die 3-Sphäre sein müsse.

1904 Er bringt selbst ein Gegenbeispiel zu seiner Behauptung von 1900: Die Mannigfaltigkeit $SO(3)/I_{60}$ (man faktorisiere die Symmetriegruppe eines Ikosaeders aus der Gruppe der Rotationen des Euklidischen Raumes heraus) hat zwar triviale Homologie, aber eine Fundamentalgruppe der Ordnung 120. Er schliesst die Diskussion mit der Frage:

> Wenn eine geschlossene 3-dimensionale Mannigfaltigkeit triviale Fundamentalgruppe hat, muss sie dann homöomorph zur 3-Sphäre sein?

1934 Henry Whitehead kündigt einen Beweis der Vermutung an, erkennt ihn aber selbst als falsch und konstruiert bald darauf selbst ein Gegenbeispiel. Mit einer Methode, welche sich als bahnbrechend für das Verständnis von Mannigfaltigkeiten erweisen wird.

In den nächsten Jahrzehnten erhält die Poincaré-Vermutung durch eine ganze Reihe vergeblicher Beweisversuche bedeutender Mathematiker den Status eines mathematischen heiligen Grals, vergleichbar nur noch mit der 1994 von Andrew Wiles bewiesenen Fermat-Vermutung oder der noch ausstehenden Riemannschen Vermutung.

1960 Stephen Smale legt einen Beweis der Poincaré-Vermutung in den Dimensionen 5 und höher vor.

1982 Michael H. Freedman beweist die Vermutung für den 4-dimensionalen Fall. Er erhält dafür 1986 die Fields-Medaille.

Richard Hamilton führt in einer Serie vielbeachteter Artikel den Ricci-Fluss auf Mannigfaltigkeiten ein und benutzt ihn, um Spezialfälle der Poincaré-Vermutung zu zeigen.

William P. Thurston erhält die Fields-Medaille, er stellt sein Geometrisierungs-Programm für 3-Mannigfaltigkeiten vor, vgl. ?.

2000 Die Poincaré-Vermutung wird vom *Clay Mathematics Institute* zu einem der sieben *Millenium Problems* erklärt, der wichtigsten offenen mathematischen Problemen. Für die Lösung jedes dieser Probleme setzt das Institut ein Preisgeld von jeweils einer Million Dollar aus.

2002/2003 Grigori Perelman vom Steklov Institut für Mathematik in St. Petersburg stellt drei Artikel ins Netz, die Hamiltons Ricci-Fluss-Programm weiterführen. In sehr gedrängter Form wird ein Beweis

[11] Der Graubart denkt hier an den Poincaréschen Wiederkehrsatz.
[12] **geschlossen** heisst *kompakt und ohne Rand*

der Poincaré-Vermutung und von Thurstons Geometrisierungs-Vermutung gegeben.

22. August 2006 Der ICM (International Congress of Mathematicians) verleiht Perelman die Fields-Medaille (die dieser nicht annimmt) und bestätigt damit, dass die Mathematikergemeinde nach ausgiebiger Prüfung von der Richtigkeit des Beweises überzeugt ist.

Grigorij Perelman

Curriculum Vitae

If they know my work, they don't need my C.V.
If they need my C.V., they don't know my work.

Grigorij Perelman

13. Juni 1966 Grigorij Yakovlevich 'Grisha' Perelman wird in Leningrad (jetzt St. Petersburg) geboren. Sein Vater ist Elektroingenieur und weckt und fördert sein Interesse an Mathematik und Physik; seine Mutter unterrichtet Mathematik an einem Technikum; seit er sechs ist, nimmt sie ihn regelmässig mit in die Oper. Mit fünfzehn ist Perelman der Star des örtlichen Mathematikclubs und gibt sein Geld für Schallplatten mit Opernaufnahmen aus.

1982 Perelman erhält mit 16 an der Internationalen Mathematikolympiade in Budapest mit 42 von 42 möglichen Punkten eine Goldmedaille und nimmt sein Studium an der Leningrader Universität auf.

1992 Perelman veröffentlicht seit einigen Jahren Artikel über Differentialgeometrie in führenden amerikanischen und russischen Fachzeitschriften. Er wird eingeladen, jeweils ein Semester an der *New York University* und an der *Stony Brook University* zu verbringen. Etwa zur gleichen Zeit bricht in seinem Heimatland die Wirtschaft zusammen. Er diskutiert in Princeton mit Richard Hamilton über dessen Ergebnisse zum Ricci-Flow.

1993 Perelman tritt ein zweijähriges Stipendium in Berkeley an und diskutiert weiterhin mit Hamilton. Am Ende seines ersten Jahres in Berkeley hat er mehrere höchst originelle Artikel veröffentlicht.

1994 Er hält einen vielbeachteten Vortrag am internationalen Mathematikerkongress in Zürich.

Sommer 1995 Trotz lukrativer Angebote von Universitäten wie Princeton und Stanford kehrt er an seine alte Forschungsstelle am Steklov Institut in St. Petersburg zurück, wo er monatlich weniger als 100 Dollar verdient. Er habe in den USA genug gespart, um für den Rest seines Lebens sein Auskommen zu haben, meinte er zu einem Freund. "Ich habe gemerkt, dass ich in Russland besser arbeiten kann". Yakov Eliashberg von der Stanford University denkt, dass er nach Russland zurückgekehrt ist, um in Ruhe an der Poincaré-Vermutung arbeiten zu können.

Richard Hamilton veröffentlicht einen Artikel mit einigen Ideen, die zu einem Beweis der Poincaré-Vermutung führen könnten. Perelman realisiert, dass Hamilton mit der Bewältigung der Hauptschwierigkeiten keinerlei Fortschritte gemacht hat.

1996 Er schreibt Hamilton einen langen Brief, in dem er ihm seine eigenen Ideen zur Behandlung dieser Schwierigkeiten auseinandersetzt - in der Hoffnung auf eine Zusammenarbeit. "Er hat nicht geantwortet" sagt Perelman, "also habe ich mich entschlossen alleine zu arbeiten."

11. November 2002 Perelman setzt den ersten seiner drei Artikel zum Ricci-Fluss ins Internet.

April 2003 Er hält in den USA eine Reihe von Vorträgen über seine spektakuläre Arbeit. Danach kehrt er nach Petersburg zurück und hat praktisch nur noch per Email Kontakt mit seinen Fachkollegen.

Juli 2003 Perelman hat die beiden anderen ergänzenden Artikel auf dem Internet deponiert. Er unternimmt keinerlei Anstalten, seine Resultate in einer Fachzeitschrift zu publizieren.

Zwei Teams von Mathematikern nehmen es auf sich, die Details in Perelmans extrem knapper Darstellung auszuarbeiten und in Form eines Buches zu veröffentlichen: Perelman erhält ein langes Email von Gang Tian, einem Kollegen am M.I.T., der ihm mitteilt, dass gerade ein zweiwöchiges Seminar in Princeton stattgefunden habe, in dem es um Perelmans Beweis ging:

"Ich denke, dass wir jetzt den gesamten Artikel verstehen" schreibt Tian "Er ist in Ordnung."

Mai 2005 Ein Kommittee aus neun prominenten Mathematikern entsendet Sir John Ball nach St. Petersburg, um Perelman zur Annahme der Fieldsmedaille zu überreden. Vergeblich.

Dezember 2005 Perelman gibt seine Stelle am Steklov-Institut in St. Petersburg auf. Er lebt zusammen mit seiner Mutter in einem Appartment in Kupchino, einem Petersburger Vorort. Seine Lieblingsbeschäftigungen neben der Mathematik sind Opernbesuche und lange Spaziergänge.

Mai bis Juli 2006 Mehrere Gruppen von Mathematikern präsentieren längere Artikel, die Details in Perelmans Beweis erläutern:

- Bruce Kleiner und John Lott
- John Morgan und Gang Tian
- Cao, Huai-Dong; Xi-Ping Zhu

Keine der Gruppen findet ernsthafte Fehler oder Lücken, die nicht mit Perelmans Techniken geschlossen werden können.

20. Juni 06 Der in Havard und Peking lehrende Shing Tung Yau hält einen Vortrag vor mehreren hundert Physikern im Auditorium des Pekinger Freundschaftshotels. Er behauptet, dass die Ausarbeitung seiner chinesischen Kollegen Cao und Zhu einen eigenständigen und essentiellen Beitrag zum Beweis darstellt. Er geht so weit, Hamilton 50% des Beweises, seinen beiden chinesischen Kollegen 30% und Perelman ganze 25% zuzuschreiben[13].

22. August 2006 Der ICM verleiht Perelman die Fields-Medaille für seine Arbeiten, aber Perelman weigert sich, die Medaille anzunehmen. Zu der Million Dollar des *Clay Institutes* meint er: "Ich werde nicht entscheiden, ob ich den Preis akzeptieren werde, bevor er mir angeboten wird."

28. August 2006 Spätestens mit Erscheinen des Artikels *Manifold Destiny* im renommierten Magazin *The New Yorker* wird der Beweis wegen der von Yau in Gang gesetzten Querelen um die Prioritätenfrage zum Politikum.

22. Dezember 2006 Das *Science Magazine* verleiht Perelmans Beweis die Ehrung *wissenschaftlicher Durchbruch des Jahres.* Es ist das erste mal, dass diese Ehrung einem Ergebnis aus der Mathematik zuteil wird.

Ende Dezember 2006 Cao und Zhu entschuldigen sich in einem Erratum zu ihrem Artikel. Es sei ihrer Aufmerksamkeit entgangen, dass eines ihrer Hauptargumente tatsächlich aus einem Vorabdruck des Buches von Kleiner und Lott stamme.

Medienstar wider Willen

Es scheint paradox - und gehorcht doch der inneren Logik der Mediengesellschaft: Je mehr sich dieser bärtige Russe dem Zugriff der Medien zu entziehen versucht, desto stärker entfacht er ihr Interesse.

"Ich denke nicht, dass ich irgendetwas zu sagen hätte, das von geringstem öffentlichen Interesse wäre" diktiert er einer Reporterin des britischen *Sunday Telegraph* im August 2006 in den Block, kurz bevor er mitteilen lässt, dass er die höchste Ehrung der mathematischen Fachwelt, die Fieldsmedaille, ablehne - ohne Begründung[14]. Das ist der Stoff, aus dem moderne Mythen geboren werden.

Die Welt hat jetzt das Bild eines genialen Einsiedlers mit langem Bart und ungeschnittenen Fingernägeln[15]. Ein moderner Hieronymus, der es fertigbringt, einen langen russischen Winter mutterseelenallein in der Datscha eines Freundes zu verbringen. Wozu auch passt, was er über seinen Stammplatz hoch oben im 3. Rang des Mariinsky Theaters in St. Petersburg zu sagen hat: Natürlich könne er weder die Mimik der Opernsänger noch Details ihrer Kostüme erkennen. Aber die Akustik! Auf keinem Platz sei sie so gut wie auf seinem.

[13] Offenbar sind selbst Mathematiker in besonderen Momenten nicht gefeit gegen arithmetische Schnitzer.

[14] Schon 1996 hatte er einen Preis der Europäischen Mathematischen Gesellschaft ausgeschlagen.

[15] Laut Perelman habe das die Natur nicht vorgesehen.

[16] Nasar ist bekannt geworden durch ihre Biographie von John Nash, verfilmt als *A Beautiful Mind*. Sie schildert in ihrem (zusammen mit David Gruber verfasstem) Artikel ? sehr amüsant, wie sie Perelman drei Tage lang diskret belagert hat - mit Botschaften und kleinen Gastgeschenken in seinem Briefkasten. Später stellte sich dann heraus, dass er seinen Briefkasten schon seit einer Wo-

So berichtet Sylvia Nasar, der er schliesslich doch ein Interview für den *New Yorker* gewährte[16]. Er betont darin mehrmals, dass er sich aus der mathematischen Gemeinschaft zurückziehe und sich nicht länger als professioneller Mathematiker betrachte. Er sei bestürzt über die inzwischen unter Mathematikern vorherrschenden laxen ethischen Standards im Hinblick auf geistiges Eigentum. Auf die Frage, ob er den Artikel von Cao und Zhu gelesen habe, antwortet er: "Es scheint, als habe Zhu das Argument nicht ganz verstanden und es sich erarbeitet". Zu Yau meint er: "Ich kann nicht sagen, das ich wütend bin. Andere Leute machen Schlimmeres. Natürlich gibt es Mathematiker, die mehr oder weniger ehrlich sind. Aber fast alle sind Konformisten. Sie sind mehr oder weniger ehrlich, aber sie tolerieren die, die nicht ehrlich sind."

Durch die Aussicht auf eine Fields-Medaille sei er dazu gezwungen worden, vollständig mit seinem Stand zu brechen. "So lange ich nicht weiter auffällig war, hatte ich eine Wahl. Entweder etwas Hässliches zu machen[17], oder mich als Schosshündchen behandeln lassen. Jetzt, wo ich zu einer sehr auffälligen Person geworden bin, kann ich nicht länger ein Schosshündchen bleiben und nichts sagen. Darum musste ich gehen."

Mikhail Gromov ist ein russischer Geometer, der seit längerem an dem Forschungsinstitut IHES in Paris beheimatet ist und bei den Spezialisten seines Gebietes Kultstatus hat. Wie viele russische Mathematiker ist auch er berüchtigt für eine *äusserst* knappe Darstellung seiner Resultate. Er hat Verständnis für Perelmans Logik:

"Um wirklich grosse Arbeit zu leisten, muss man einen reinen Geist haben. Man darf nur an die Mathematik denken. Alles andere ist menschliche Schwäche. Preise zu akzeptieren heisst, Schwächen zu zeigen."

Andere mögen Perelmans Ablehnung der Fields-Medaille als arrogant bezeichnen, meint Gromov, aber seine Prinzipien seien bewundernswert. "Der ideale Wissenschaftler macht Wissenschaft und kümmert sich um nichts anderes." sagt er. "Er möchte sein Ideal leben. Nun, ich denke nicht, dass er wirklich in dieser idealen Welt lebt. Aber er versucht es."

Literaturempfehlungen

Es würde den Rahmen dieses Artikels eindeutig sprengen, wenn ich versuchen würde, einen Überblick über die mathematischen Hintergründe zu geben. Zudem gibt es dazu hervorragende und leicht zugängliche Artikel im Internet[18].

Poincaré-Vermutung: Die offizielle Beschreibung des Problems findet man auf der Website des *Clay Mathematics Institutes*, das auch das Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt hat. Etwas ausführlicher ist der Artikel ? desselben Autors.

Beweisidee: Sehr klar finde ich ?. Nach zwei Seiten kennt man Thurstons Geometrisierungsvermutung und versteht, wie sich daraus die Poincaré-Vermutung ergibt.

Zur Person Grigorij Perelman: Am verlässlichsten scheint mir der 17-seitige Artikel ? zu sein[19]. Dort findet man mehr zu der auch wissenschaftssoziologisch interessanten Yau-Affaire.

Topologie: Wunderbar ist ?, lohnende Lektüre ist auch ?. Als ersten Einstieg in die verschiedensten Formalismen der algebraischen Topologie bis hin zum Riemann-Roch-Theorem über Riemannsche Flächen ist ? zu empfehlen. Klassikerstatus (grundlegende Ideen aus der Sicht des Meisters) dürfte schon jetzt ? zuzusprechen sein.

che nicht geleert hatte. Bei ihrem Treffen durfte sie Perelman zunächst auf einem vierstündigen Spaziergang durch St. Petersburg begleiten und anschliessend einem fünfstündigen Gesangswettbewerb im Petersburger Konservatorium lauschen, bevor er sich zu dem Interview bereit fand.

[17] i.e. sich öffentlich zur mangelnden Integrität innerhalb der Mathematikerzunft zu äussern

[18] Die zitierten Artikel aus den *Notices of the AMS* kann man sich als PDF herunterladen.

[19] Der Artikel hat es sogar zu einem eigenen Eintrag in *Wikipedia* gebracht.

Zufall als Quelle der Effizienz Eine der Brücken zwischen Mathematik und Informatik

Teil 2: Analyse der Fehlerwahrscheinlichkeit

Der Gegner, der eure Fehler entdeckt,
ist für euch nützlicher als ein Freund,
der sie verstecken will.
Leonardo da Vinci

Juraj Hromkovič, ITE ETH Zürich, ETH Zentrum CAB F16, 8092 Zürich

Abstrakt

Der zweite Teil unseres Artikels über effiziente zufallsgesteuerte Systeme analysiert die Fehlerwahrscheinlichkeit des vorgestellten randomisierten Kommunikationsprotokolls. Durch die Analyse dieser Fehlerwahrscheinlichkeit entdecken wir nicht nur, dass man eine starke Reduktion der Komplexität nur mit geringem Zuverlässigkeitsverlust bezahlen kann, sondern fangen an zu verstehen, warum der Zufall eine der Quellen der Effizienz ist.

Die Analyse der Fehlerwahrscheinlichkeit

Um die Wahrscheinlichkeit eines falschen Resultates zu untersuchen, brauchen wir nur Kenntnisse aus der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie. Im Prinzip reicht es aus zu wissen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, eine weiße Kugel aus einem Topf zu ziehen, in dem m weiße und n schwarze Kugeln liegen.

Den Grad der Unsicherheit, das richtige Resultat zu berechnen, nennen wir in der Informatik die **Fehlerwahrscheinlichkeit**. Genauer, die **Fehlerwahrscheinlichkeit für zwei Inputstrings x und y** ist die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{Fehler}_{ZEUGE}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

dass ZEUGE eine falsche Ausgabe auf der Eingabe x und y (wenn R_I als Speicherinhalt den String x und R_{II} als Speicherinhalt den String y hat) liefert. Für unterschiedliche Eingaben (Anfangssituationen) x und y kann $\text{Fehler}_{ZEUGE}(x, y)$ unterschiedlich sein. Unsere Aufgabe ist zu zeigen, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit für alle möglichen Eingaben x und y sehr gering ist.[1]

> *„Was ist die Fehlerwahrscheinlichkeit für x und y genau und wie kann man sie bestimmen?"*

Das Protokoll ZEUGE wählt zufällig eine Primzahl aus $\text{PRIM}(n^2)$ für Eingabestrings x und y der Länge n. Diese Wahl der Primzahl entscheidet, ob das Protokoll das richtige oder das falsche Resultat liefert. Deswegen teilen wir die Menge $\text{PRIM}(n^2)$ in zwei Teile auf. Alle Primzahlen, für die ZEUGE die richtige Antwort für x und y liefert, nennen wir

gut für (x, y).

Die Primzahl 5 war gut für $(01111, 10110)$ im Beispiel 1.

Die restlichen Primzahlen, deren Wahl zur falschen Antwort für (x, y) führt, nennen wir

schlecht für (x, y).

Die Primzahl 7 ist schlecht für $(01111, 10110)$, wie in Beispiel 1 gezeigt wurde. Weil jede von den $\text{Prim}(n^2)$ vielen Primzahlen in $\text{PRIM}(n^2)$ die gleiche Wahrscheinlichkeit hat gewählt zu werden, gilt

$$\text{Fehler}_{ZEUGE}(x, y) = \frac{\text{die Anzahl der schlechten Primzahlen für } (x, y)}{\text{Prim}(n^2)}$$

d.h. die Fehlerwahrscheinlichkeit ist die Anzahl der schlechten Primzahlen in der Urne im Verhältnis zu der Anzahl aller Primzahlen in der Urne.

Wir sehen die Situation in Abbildung 1 dargestellt. Unsere Aufgabe ist, für alle Stringpaare x und y zu zeigen, dass die Menge der schlechten Primzahlen für (x, y) sehr klein ist im Vergleich zur Menge aller Primzahlen in $\text{PRIM}(n^2)$.

Wie groß ist $\text{PRIM}(m)$? Eine der tiefsten und wichtigsten Errungenschaften

[1] Wir haben in dieser Richtung sehr hohe Anforderungen an die zufallsgesteuerten (randomisierten) Systeme und Algorithmen. Wir fordern für jede einzelne Eingabe eine hohe Wahrscheinlichkeit, korrekt zu rechnen. Dies steht im Gegensatz zu sogenannten stochastischen Verfahren, in denen man nur fordert, dass man statistisch auf den meisten Eingaben mit hoher Wahrscheinlichkeit richtig arbeitet.

Abbildung 1: Alle Primzahlen in PRIM(n^2)

der Mathematik[2] ist der Primzahlsatz, der besagt, dass

$$\text{Prim}(m) \text{ ungefähr } \frac{m}{\ln m}$$

ist, wobei $\ln m$ der natürliche Logarithmus von m ist. Also behauptet der Primzahlsatz, dass die Primzahlen relativ dicht zwischen den natürlichen Zahlen verstreut sind, weil sich an ungefähr jeder $\ln m$-ten Stelle eine Primzahl befindet. Für unsere Berechnungen nehmen wir ein konkretes Resultat

$$\text{Prim}(m) > \frac{m}{\ln m}$$

für alle natürlichen Zahlen $m > 67$. Also haben wir für unsere Zwecke

$$\text{Prim}(n^2) > \frac{n^2}{2\ln n}$$

für alle $n \geq 9$. Unsere nächste Zielsetzung ist jetzt zu zeigen, dass

> *für jede Eingabe (x,y) die Anzahl der schlechten Primzahlen für (x,y) höchstens $n-1$ ist,*

also wesentlich kleiner als $n^2/(2\ln n)$.

Bei der Untersuchung der Fehlerwahrscheinlichkeit unterscheiden wir zwei Möglichkeiten bezüglich der tatsächlichen Beziehungen zwischen x und y.

Fall 1 $x = y$ und somit ist die richtige Antwort „gleich".

Wenn $x = y$, dann auch Zahl(x) = Zahl(y). Egal welche Primzahl p gezogen wird,

$$s = \text{Zahl}(x) \bmod p = \text{Zahl}(y) \bmod p = q$$

und somit $s = q$. In Worten: wenn man zwei gleiche Zahlen durch dieselbe Primzahl p teilt, müssen die Reste beider Divisionen auch gleich sein. Das

[2]genauer der Zahlentheorie in der Mathematik

Protokoll ZEUGE liefert also für alle p aus PRIM(n^2) die richtige Antwort. Somit gilt

$$\text{Fehler}_{ZEUGE}(x, x) = 0$$

für alle Strings x.

Also kann ein Fehler nur bei unterschiedlichen Eingabestrings x und y auftreten.

Fall 2 $x \neq y$ und somit ist die richtige Antwort „ungleich".

Wie wir schon in Beispiel 1 für $x = 01111$ und $y = 10110$ festgestellt haben, ist die Fehlerwahrscheinlichkeit ungleich Null, weil für $p = 7$ das Protokoll ZEUGE die falsche Antwort „gleich" liefert.

$n-1$ ist eine obere Schranke für die Anzahl der schlechten Primzahlen (x, y), wenn die Anzahl der Bits von x und y gleich n ist. Diese Schranke finden wir, indem wir die Eigenschaften schlechter Primzahlen für (x, y) untersuchen.

Eine Primzahl p ist schlecht für (x, y), wenn die Reste beim Teilen von Zahl(x) und Zahl(y) durch p gleich sind, d.h. wenn

$$s = \text{Zahl}(x) \bmod p = \text{Zahl}(y) \bmod p$$

gilt. Die Gleichung

$$s = \text{Zahl}(x) \bmod p$$

bedeutet nichts anderes, als dass

$$\text{Zahl}(x) = h_x \cdot p + s,$$

wobei h_x der ganze Teil der Division von Zahl(x) mit p ist und $s < p$ deren Rest. Analog können wir also schreiben

$$\text{Zahl}(y) = h_y \cdot p + s,$$

wobei p sich h_y mal in Zahl(y) befindet und s der Rest ist. Nehmen wir an, dass Zahl$(x) \geq$ Zahl(y) gilt. (Wenn Zahl$(y) >$ Zahl(x) gilt, kann man die Analyse analog führen). Dann berechnen wir Zahl(x) − Zahl(y).

$$\begin{array}{c} \text{Zahl}(x) \\ -\text{Zahl}(y) \\ \hline \text{Dif}(x,y) \end{array} \qquad \begin{array}{r} h_x \cdot p + s \\ -h_y \cdot p - s \\ \hline h_x \cdot p - h_y \cdot p \end{array}$$

Also gilt für die Differenz Dif(x, y):

$$\text{Dif}(x, y) = \text{Zahl}(x) - \text{Zahl}(y) = h_x \cdot p - h_y \cdot p = (h_x - h_y) \cdot p.$$

Die Schlussfolgerung ist, dass p die Zahl Dif(x, y) = Zahl(x) − Zahl(y) teilt. Mit anderen Worten

Eine Primzahl ist schlecht für (x, y) *genau dann,*
wenn p *die Zahl* $\mathrm{Dif}(x,y) = \mathrm{Zahl}(x) - \mathrm{Zahl}(y)$ *teilt.*

Wozu ist das hilfreich? Zuerst haben wir einen schnellen Weg zur Bestimmung von schlechten Primzahlen gefunden.

Beispiel 1 Gegeben seien die Bitstrings $x = 1001001$ für R_I und $y = 0101011$ für R_{II}, beide von der Länge $n = 7$. Die Aufgabe ist, die Menge der schlechten Primzahlen für $(x, y) = (1001001, 0101011)$ zu bestimmen.

Zuerst bestimmen wir die Menge

$$\mathrm{PRIM}(n^2) = \mathrm{PRIM}(49) = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$$

der Primzahlen, aus der ZEUGE eine Primzahl zufällig zieht. Nach unserer Beobachtung sind die schlechten Primzahlen für $(1001001, 0101011)$ gerade diejenigen, die die Differenz

$$\mathrm{Dif}(1001001, 0101011) = \mathrm{Zahl}(1001001) - \mathrm{Zahl}(0101011) = 73 - 43 = 30$$

teilen. Wir sehen sofort, dass nur 2, 3 und 5 aus PRIM(49) die Zahl 30 teilen. Die Zahlen 2, 3 und 5 sind also die einzigen schlechten Primzahlen für die Eingabe $(x, y) = (1001001, 0101011)$. Somit ist

$$\mathrm{Fehler}_{ZEUGE}(1001001, 0101011) = \frac{3}{\mathrm{Prim}(49)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

□

An dieser Stelle kann man wieder auf folgende Weise üben.

Aufgabe 1 Finden Sie alle schlechten Primzahlen für folgende Paare von Bitstrings.

(i) $(01010, 11101)$

(ii) $(110110, 010101)$

(iii) $(11010010, 01101001)$.

Die verbleibende Frage ist jetzt:

> „Wie hilft uns das Wissen, dass schlechte Primzahlen $\mathrm{Dif}(x, y)$ teilen, dabei, ihre Anzahl zu beschränken?“

Weil beide Zahlen Zahl(x) und Zahl(y) kleiner als 2^n sind, gilt auch

$$\mathrm{Dif}(x,y) = \mathrm{Zahl}(x) - \mathrm{Zahl}(y) < 2^n.$$

Wir wollen zeigen, dass eine Zahl kleiner als 2^n nicht mehr als $n-1$ Primfaktoren (Primzahlen, die die Zahl teilen) haben kann. Dazu benutzen wir einen berühmten Satz aus dem Mathematikunterricht: den Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie. Er besagt, dass

> *jede natürliche Zahl eindeutig als ein Produkt von Primzahlen dargestellt werden kann.*

Zum Beispiel gilt

$$5940 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11\ ,$$

und somit sind die 4 Primzahlen $2, 3, 5$ und 11 die Primfaktoren von 5940.

Seien $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ alle Primfaktoren unserer Zahl Dif(x,y) in aufsteigender Reihenfolge. Damit ist $p_1 \geq 2$ (als die kleinste Primzahl), $p_2 \geq 3$ (p_2 ist größer gleich die zweite Primzahl) und allgemein p_i mindestens so groß, wie die i-te Primzahl. Damit gilt

$$\mathrm{Dif}(x,y) = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot p_3^{i_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k}$$

für $i_j \geq 1$ für alle j von 1 bis k. Deswegen dürfen wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathrm{Dif}(x,y) &\geq p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k \\ &> 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \\ &= k! \end{aligned}$$

Weil Dif$(x,y) < 2^n$ und Dif$(x,y) > k!$ (wie gerade gezeigt), erhalten wir

$$2^n > k!\ .$$

Weil $n! > 2^n$ für $n \geq 4$, muss k kleiner als n sein und somit erhalten wir die angestrebte Aussage

$$k \leq n-1,$$

d.h. die Anzahl der Primfaktoren von Dif(x,y) ist höchstens $n-1$ und somit ist die Anzahl der schlechten Primzahlen für (x,y) höchstens $n-1$.

Endlich können wir die Fehlerwahrscheinlichkeit von oben beschränken. Für alle Paare von Bitstrings (x, y) von der Länge $n \geq 9$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Fehler}_{ZEUGE}(x, y) &= \frac{\text{Anzahl der schlechten Primzahlen für } (x, y)}{\text{Prim}(n^2)} \\ &\leq \frac{n-1}{n^2/\ln n^2} \\ &\leq \frac{2 \ln n}{n}. \end{aligned}$$

Damit ist die Fehlerwahrscheinlichkeit von ZEUGE für unterschiedliche Datenbankinhalte x und y höchstens $2\ln n/n$, was für unser Beispiel mit $n = 10^{16}$ höchstens

$$\frac{0.736827}{10^{14}}$$

ist. Im Beispiel 1 haben wir gesehen, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit relativ hoch (3/15) sein kann. Dies kommt dadurch, dass *diese Fehlerwahrscheinlichkeit mit wachsender Eingabelänge immer kleiner wird.* Deswegen empfiehlt es sich, für kleine Eingabelängen von einigen Tausenden von Bits den Vergleich deterministisch durchzuführen, weil die Kosten dafür sowieso gering sind. Erst für längere Eingaben lohnt es sich dann, das randomisierte Protokoll anzuwenden.

Vertiefung und Diskussion

Es ist keine gute Strategie, den Unterricht eines Themas auf die Vorführung eines einzigen Beispiels zu reduzieren. Was kann man hier üben und danach auch prüfen? Wie kann man sich weiter vertiefen?

Außer dem Nachrechnen konkreter Beispiele kann man sich als Ziel setzen, die Fehlerwahrscheinlichkeit dadurch zu reduzieren, dass man die Primzahlen zufällig aus PRIM(n^3) oder einem anderen größeren Bereich zieht. Die Schülerinnen und Schüler sollten fähig sein, solche Analysen selbstständig durchzuführen und bei gegebenem n und einer gegebenen oberen Schranke k für die Fehlerwahrscheinlichkeit eine passende Menge PRIM$(f(n, k))$ bestimmen können.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sowie das Wiederholen von Zufallsexperimenten spielen eine Rolle bei folgender Vertiefung des Themas: das zufallsgesteuerte Protokoll kann auf der gleichen Eingabe mehrmals unabhängig angewendet werden und die Antwort „gleich" wird nur dann genommen, wenn bei allen Versuchen „gleich“ herausgekommen ist. Nur wenn einmal die Antwort „ungleich“ gegeben wurde, wissen wir mit Sicherheit, dass „ungleich“ die richtige Antwort ist. Hier kann man wieder die - durch das Wachstum der Kommunikationskomplexität bezahlte - Reduktion der Fehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Wiederholungen untersuchen. Das Ganze kann man mit der ersten Methode der Reduktion der Fehlerwahrscheinlichkeit vergleichen oder kombinieren.

Ein weiterer Schritt könnte in der Verallgemeinerung der Aufgabenstellungen liegen. Beispielsweise hat R_I eine Zahl x und R_{II} eine kleine Menge S von (vorerst 2, 3 oder 4) Zahlen gespeichert. Die Frage ist, ob $x \in S$ gilt. Oder beide haben kleine Mengen von Zahlen gespeichert und wir wollen wissen, ob sie disjunkt sind. Je nachdem, wie tief man in die Wahrscheinlichkeitstheorie eindringen will, können die Aufgaben beliebig schwierig gestaltet werden

Für eine ausführliche Darstellung von gelösten Musterbeispielen und für eine weitere Vertiefung empfehlen wir nicht nur die „Sieben Wunder der Informatik“, sondern auch das Lehrbuch „Randomisierte Algorithmen. Methoden zum Entwurf von zufallsgesteuerten Systemen für Einsteiger“ (Teubner, 2004). Hier werden mehrere noch eindrucksvollere Beispiele der Zufallssteuerung präsentiert. Zusätzlich wird in diesem Buch ein tieferes Verständnis für die unheimliche Stärke der Randomisierung vermittelt.

Congrès : Union des Professeurs de Physique et de Chimie

Philippe Beney , LCP, 1950 Sion

En 2006, l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie (UdPPC) fêtait ses cent ans d'existence. En effet en 1906, un petit groupe de professeurs de physique déstabilisés par la réforme de leur enseignement décide de créer une association : l'Union des Physiciens. Cette association avait pour but d'échanger des informations pour améliorer l'enseignement de la physique. En 2006 cette association est devenue UdPPC ; ceci, vu de l'extérieur a de quoi surprendre. Ce qu'il faut savoir, c'est qu'en France les professeurs de physique doivent enseigner la chimie et vice versa, bien que pratiquement aucun professeur n'ait de formation complète dans les deux branches. La plupart des membres ont une formation de physicien mais ils sont très demandeurs de conseils didactiques en chimie, ce qui explique les bons contacts que la CRP et la CRC entretiennent avec UdPPC.

Du 27 au 30 octobre 2006, les journées nationales de l'UdPPC se sont tenues à Besançon. Six cents congressistes sont venus de toute la France pour s'informer, se cultiver et aussi fraterniser. Afin de maintenir les contacts avec l'étranger une dizaine de représentants de divers pays avaient été invités (Allemagne, Belgique, Suisse…). Il a fallu deux ans de préparation au comité régional, constitué de quinze personnes, pour organiser cette rencontre annuelle. On peut subdiviser ces journées en quatre thèmes : syndical, commercial, académique, touristique.

Pour la partie syndicale l'association essaie de faire entendre sa voix au Ministère de l'Education Nationale, par l'intermédiaire de son président : M. Jean-Jacques Jacquemin. Cette année le souci des professeurs était de devoir enseigner une troisième branche qui serait, pour les professeurs de physique et de chimie, les mathématiques. Bien entendu ceci favoriserait certainement la gestion administrative, cela ne pourrait en aucun cas améliorer la qualité de l'enseignement.

Trente-trois sociétés commerciales ont présenté leurs produits et leur savoir-faire, pour les plus connues, il y avait : Belin, Bordas, de Boeck, Jeulin, Pierron, …

Huit conférenciers, ayant fait une carrière internationale se sont succédé dans l'auditoire Fourier pour vulgariser les recherches et les réflexions actuelles en physique et en chimie et les rendre intelligibles aux professeurs de lycée voire à nos élèves. Il y avait entre autres : Etienne Klein, Etienne Guyon, le prix Nobel Claude Cohen-Tannoudji, pour ne citer que les plus célèbres.

Etienne Guyon nous a présenté une conférence sur la mécanique des fluides, du point de vue de la distinction entre structure mélangeante et non mélangeante. La structure mélangeante correspond à la turbulence et la structure non mélangeante correspond à l'écoulement laminaire.

Etienne Klein a choisi un sujet plus métaphysique : le temps. La perception du temps du point de vue psychologique, philosophique et physique, pour constater qu'actuellement il n'y a pas de définition satisfaisante du temps. Pour illustrer ses propos E. Klein nous a présenté le concept suivant : le neutron a une durée de vie de quelques minutes et il se transforme en proton en émettant un Π_{-}, celui-ci est capté par un proton qui se transforme en neutron. La finitude de la durée de vie du neutron se transforme en éternité pour les noyaux stables. Il s'est trouvé, parmi les congressistes une personne pour demander : « Comment expliquez-vous la stabilité des étoiles à neutrons ? ». Ne sachant que répondre, Etienne Klein s'est adressé à Claude Cohen-Tannoudji qui n'a pas pu l'aider. Parfois ces belles conférences sont aussi des leçons d'humilité, car c'est en se trompant que l'on peut se corriger et avancer.

La conférence de Claude Cohen-Tannoudji portait sur les atomes ultrafroids. Claude Cohen-Tanoudji nous a expliqué comment ralentir un atome à l'aide d'un laser. En effet, si un atome absorbe un photon de quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}$, il diminue sa quantité de mouvement d'autant, puis l'atome émet un photon, mais en moyenne sa quantité de mouvement ne changera pas lors des émissions car il n'y a pas de direction privilégiée contrairement au mécanisme d'absorption qui se fait dans la direction et le sens des photons du laser. Ce processus se produit à une fréquence telle qu'un atome de césium est accéléré de l'ordre de 10^5g. Ralentir un atome n'est pas refroidir un gaz d'atomes, pour ceci, il faut diminuer la dispersion des vitesses autour de la vitesse moyenne, on utilise alors six faisceaux lasers comme les six faces d'un cube et si l'atome a une vitesse, par effet Doppler il absorbe un photon qui diminue sa quantité de mouvement. On peut ainsi obtenir des températures de l'ordre du milli ou même du nano kelvin. Les applications et les nouvelles possibilités de recherche sont impressionnantes : horloges atomiques, ondes de matière, transition fermions bosons ...

A côté de ces conférences, les organisateurs nous ont proposés quarante-trois « ateliers », c'est-à-dire des conférences données par des professeurs ou des assistants de plusieurs universités. J'ai pu suivre, notamment : comment mesurer la vitesse d'un fluide, la nanoélectronique et les interactions photons plasmon, les muscles de silicium, une démonstration sur les ciments et la formation des gouttes sur une surface. Il est impressionnant de voir que ce, qui était considéré comme une curiosité théorique, il y a quinze ans, est devenu une réalité de laboratoire aujourd'hui .

La dernière journée était consacrée à des visites à Besançon et de ses environs.

Après un tel congrès, on se met à rêver et à souhaiter qu'un petit pays comme la Suisse avec ses sept millions d'habitants et la plus forte densité de prix Nobel au monde, favorise, sous l'impulsion de notre société la SSPMP, un congrès de cette ampleur en unissant les connaissances du CERN, de ses écoles polytechniques ainsi que de ses universités.

Philippe Beney

P.S : Un enregistrement d'une conférence de Claude Cohen-Tannoudji est disponible sur canalu.fr.

Cours CRM 2007

La CRM, soucieuse de satisfaire des volontés émises par des participants au dernier cours de perfectionnement, vous propose cette année un thème concernant la théorie des nombres avec des applications actuelles. Pour ce faire, elle a fait appel à deux conférenciers émérites de l'EPFL. Elle espère ainsi répondre à vos attentes et vous invite à y participer pour aiguiser votre curiosité.

07.04.24	**Applications de la théorie des nombres : cryptographie et codage**
	Cryptographie et codage
	Ce cours présentera quelques notions de la théorie des nombres et leurs applications pour la cryptographie et le codage.
	En première partie, on abordera les aspects algorithmiques de l'arithmétique : les calculs des grands nombres, l'algorithme d'Euclide, les restes chinois, les grands nombres premiers et la factorisation. Suivront l'algorithme RSA, les problèmes d'implémentation et les cas d'échecs, ainsi que les cryptosystèmes sûrs. On introduira ensuite les notions de base de la théorie algébrique des codes correcteurs d'erreurs utilisés par exemple pour la communication à travers un canal bruité ou sur les CD. La seconde partie du cours sera donc consacrée aux concepts de base du codage : exemples d'utilisations de la redondance, les codes linéaires, les matrices génératrices et de parité, codes de Hamming. On terminera avec des applications à la construction de codes correcteurs d'erreurs : codes cycliques, codes Bose-Chauduri-Hocquengheim et de Reed-Solomon.
Public cible	Mathématiciens
Langue du cours	Français
Intervenants	Nicolas Macris et Serge Vaudenay, professeurs EPFL
Fournisseurs de cours	CPS-WBZ
Direction du cours	Bernard Aymon, Promenade de la Lienne 3, 1958 St-Léonard Tél : 027 203 78 31, E-mail : bernaymon@bluewin.ch
Dates du cours	Mardi 25.09.07 – Vendredi 28.09.07
Lieu du cours	Leysin
Prix du cours	CHF 320.00 ; à ne verser qu'après avoir reçu les documents concernant le déroulement du cours
Délai d'inscription	23.07.07

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Departement Mathematik

ETH Zentrum HG G 51.3
CH-8092 Zürich

Prof. Dr. Urs Kirchgraber
Phone: +41-44-632 34 54
Fax: +41-44-632 18 37
kirchgra@math.ethz.ch
www.math.ethz.ch/~kirchgraber

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht

Programm HS 2007

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag von 17.15 bis 18.45 Uhr im Auditorium F1 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

25.10.07	H. K. Strick, Leverkusen (D) **Stochastik kompakt: Worauf es beim Stochastikunterricht ankommt**
08.11.07	J. Hromkovic, ETH Zürich **Einführung ins Programmieren und was der Mathematikunterricht davon hat**
22.11.07	M. Akveld, KS Rämibühl und ETH Zürich **Knoten in der Mathematik - Ein Spiel mit Schnüren, Bildern und Formeln**
06.12.07	J. Vahrenhold, Universität Dortmund **Algorithmische Geometrie als Brücke zwischen dem Mathematik- und Informatikunterricht**

Herzlich laden ein:

U. Kirchgraber (kirchgra@math.ethz.ch)
P. Gallin (p.gallin@freesurf.ch)
J. Hromkovic (juraj.hromkovic@inf.ethz.ch)
H. Klemenz (hklemenz@geosoft.ch)

Ankündigung

Der 18. Schweizerische Tag über Mathematik und Unterricht findet am Mittwoch, 19. September 2007 am Gymnasium Kirschgarten in Basel statt.

Robotik im Gymnasium

Kursnummer: wbz_07_05_21
Kurssprache: Deutsch

Kursinhalte:
Roboter erkunden den Mars, operieren Menschen, bauen Autos und verändern die künftige Arbeits- und Lebenswelt der heutigen Gymnasiasten. Das Bauen und Programmieren von „klugen" Robotern ist kreativ und eignet sich zum Vermitteln und Vernetzen von physikalischen und technischen Sachthemen; Probleme müssen im Team gelöst werden und fördern Kommunikations- und Kooperationskompetenzen. Der Kurs will Impulse geben und Unterrichtshilfen für Lehrerinnen und Lehrer bereitstellen. Diese Unterrichtshilfen unterstützen die Lehrkräfte beim erfolgreichen Gestalten eines Robotikkurses im Rahmen eines Projektes, einiger Projekttage, einer Arbeitsgemeinschaft oder eines Semesterkurses. In drei Halbtagen bringen wir die Lego Mindstorms NXT-Roboter dazu, Wettbewerbsaufgaben zu lösen.
Erfahrungsberichte und Unterrichtsmaterialien von Kollegen ergänzen die praktische Arbeit. Wir besuchen Robotik-Forschungslabors und erhalten Einblick in die Zukunft der Robotik.

Zielgruppe:	Physiklehrpersonen, Informatiklehrpersonen und an Technik interessierte Lehrpersonen
Kursort:	Zürich ETH Zentrum, Autonomous Systems Lab
Kursdaten:	Mittwoch 3.10.07- Freitag 5.10.07
Anbieter:	wbz Schweizerische Zentralstelle für die Weiterbildung der Mittelschulpersonen Tel.: 041 249 99 11, Fax: 041 240 00 79 E-Mail: wbz-cps@wbz-cps.ch Internet: www.wbz-cps.ch
Kursleitung:	Prof. Dr. Roland Siegwart, ETH Zürich Dr. Christian Schorno, ETH Zürich; E-Mail: schorno@mavt.ethz.ch René Jung, Bachtobelstrasse 84, 8045 Zürich Tel: 044 463 95 71, E-Mail: rjung@swissonline.ch
Referent/innen:	Prof. Dr. Roland Siegwart, Autonomous Systems Laboratory, ETH Dr. Gilles Caprari, Autonomous Systems Laboratory, ETH Vance Carter, EducaTec AG René Jung, Kantonsschule Wiedikon, Zürich Dorit Assaf, Artificial Intelligence Laboratory, Universität Zürich Dr. Christian Schorno, ETH & E-Learning-Koordinator der Universität Zürich Dr. Vera de Vries, Autonomous Systems Laboratory, ETH
Kurskosten:	480.- (NXT Basisset von Lego Mindstorms und Software inbegriffen)
Anmeldefrist:	28.07. 07 (Anmeldung über webpalette.ch -> WBZ-CPS -> Physik)

FORUM
vera

VERANTWORTUNG FÜR
DIE ENTSORGUNG RADIOAKTIVER ABFÄLLE

Veranstaltungshinweis

11. Weiterbildungsseminar des Forum VERA für Lehrpersonen
In Kooperation mit der WBZ, Weiterbildungszentrale für Mittelschullehrer

Nachhaltigkeit und Energie: Matchentscheidend

Der Bedarf an Energie wächst weltweit rasant. Welche Energieträger – Gas, Wasser, Wasserstoff, Kernenergie, Kernfusion, erneuerbare Energien, usw. – werden die ausschlaggebenden Energielieferanten der Welt im Jahr 2020 sein, welche eine nachhaltige Energieversorgung ermöglichen?
Der elfte Lehrer-Weiterbildungskurs des **Forum VERA** beschäftigt sich mit:

- Grundprinzipien einer nachhaltigen Energienutzung und Wirtschaftsentwicklung
- die verschiedenen Energieträger aus der Sicht der Nachhaltigkeit
- Vor- und Nachteile der verschiedenen Energiearten (graue Energie, Abfallproblematik, nachhaltige Nutzungsmöglichkeiten, ökonomische Aspekte)
- Methoden und Mittel zur didaktisch sinnvollen Einbindung in den Unterricht

Der Kurs beinhaltet auch eine Besichtigung der NAGRA-Forschungsarbeiten im Züricher Weinland, einer Biogasanlage sowie des Forums Chriesbach, dem Null-Energiehaus der EAWAG.
Das vollständige Programm finden Sie unter www.forumvera.ch

Referenten:
Prof. Dr. **Thomas Dyllick** (Prorektor der Universität St. Gallen), Prof. **Raymond Lafitte** (EPFL), **Tony Kaiser** (Direktor Zukunftstechnologien, Alstom), **Tony Williams** (Leiter Kernbrennstoffe, NOK), PD Dr. **Thomas Kohl** (ETH Zürich), Dr. **Thomas Nussbaumer** (Leiter von Verenum Engineering, Zürich), **Rolf Schenk** (Gemeidepräsident Trüllikon), Ulrich Bundi (EAWAG)

Angesprochen sind
- Physik-, Chemie-, Biologie und Mathematiklehrkräfte und deren Verbände
- Wirtschafts- und Rechtskundelehrkräfte der Sekundarstufe 1 und 2

Datum, Ort:
Donnerstag, 13. September bis Samstag 15. September 2007
Kartause Ittingen (TG)

Organisation und Anmeldung:
Forum VERA
c/o Senarclens, Leu + Partner AG
Freigutstrasse 8, 8027 Zürich
Tel.: 043 305 05 90; Fax: 043 305 05 99
www.forumvera.ch oder sabine.braun@senarclens.com

Kosten:
Fr. 370.- (incl. zwei Übernachtungen, Verpflegung und Besuche)
Eine Anmeldung bis zum 7. September 2007 ist erforderlich.

Forum VERA c/o Senarclens, Leu & Partner Postfach 1640 CH 8027 Zürich Tel.: 043 305 05 90 www.forumvera.ch

Ja - Oui - Sì ☐

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und -lehrer (VSG) werden.

J'aimerai devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 95.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 30.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra ☐ Herr/M./Sig. ☐ Prof. ☐ Dr. ☐

Name/Nom/Cognome: ....

Vorname/Prenom/Nome: ....

Adresse/Indirizzo (privat/privato): ....

Plz-Ort/NP-Ville/CAP-Luogo: ....

(Land/Pays/Paese): ....

Email: .... (Tel): ....

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita): ....

Sprache/Langue/Lingua: D☐ F☐ I.☐

Schule/école/scuola: .... Kanton/canton/cantone: ....

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo ☐ passive/passif/passivo ☐
Student/-in, étudiant(e), studente/ssa. ☐

Einsenden an/envoyer à/inviare a:
VSG-SSPES-SSISS, Postfach 8742 (Waisenhausplatz 14), 3001 Bern
oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*
VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*
Wolfgang Pils wolfgang.pils@bluewin.ch
Bergstr. 48 Tel. 044 881 75 65
8424 Embrach

Layout – *Mise en page*
Jean-Luc Barras jeanluc.barras@postmail.ch
Es Novallys 224 Tél. 026 912 98 24
1628 Vuadens

Inserateverwaltung – *Publicité*
Urs Zimmermann uzimmermann@kzu.ch
Sonnhaldenstr. 17 Tel. 044 872 31 31
8184 Bachenbülach

Adressänderung – *Changement d'adresse*
VSMP Mitglieder – *Membres de la SSPMP*
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat, Postfach 8742
3001 Bern
Abonnenten die nicht Mitglieder der VSMP sind
Wolfgang Pils wolfgang.pils@bluewin.ch
Bergstr. 48 Tel. 044 881 75 65
8424 Embrach

Druck und Versand – *Imprimerie*
Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)
– *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 105	31.08.2007 (20.10.2007)
Nr. 106	31.12.2007 (20.02.2008)
Nr. 104	30.04.2008 (20.06.2008)

Präsidentin VSMP – SSPMP – SSIMF
Elisabeth McGarrity mcgarrity@rhone.ch
Bäjiweg 45 Tel. 079 34 34 862
3902 Brig-Glis

Deutschschweizerische Mathematikkommission
Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutschschweizerische Physikkommission
Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Commission Romande de Mathématique
Patrick Hochuli patrick.hochuli@gfbienne.ch
Alex-Moser 50 Tél. 032 365 60 15
2503 Bienne

Commission Romande de Physique
Philippe Drompt phil.drompt@swissonline.ch
Rue des Tilles 23 Tél. 032 485 11 09
2603 Péry

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana
Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Bestimmungen für Inserate und Beilagen
– *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Ganzseitige Inserate	Fr. 500.–
Halbseitige Inserate	Fr. 300.–
Beilagen bis 20 g	Fr. 500.–
Beilagen über 20 g	Nach Vereinbarung

Auflage – *Tirage*
900. Erscheint dreimal jährlich.

Internet-Adressen – Adresses Internet

http://www.vsmp.ch — http://www.sspmp.ch — http://www.ssimf.ch